This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

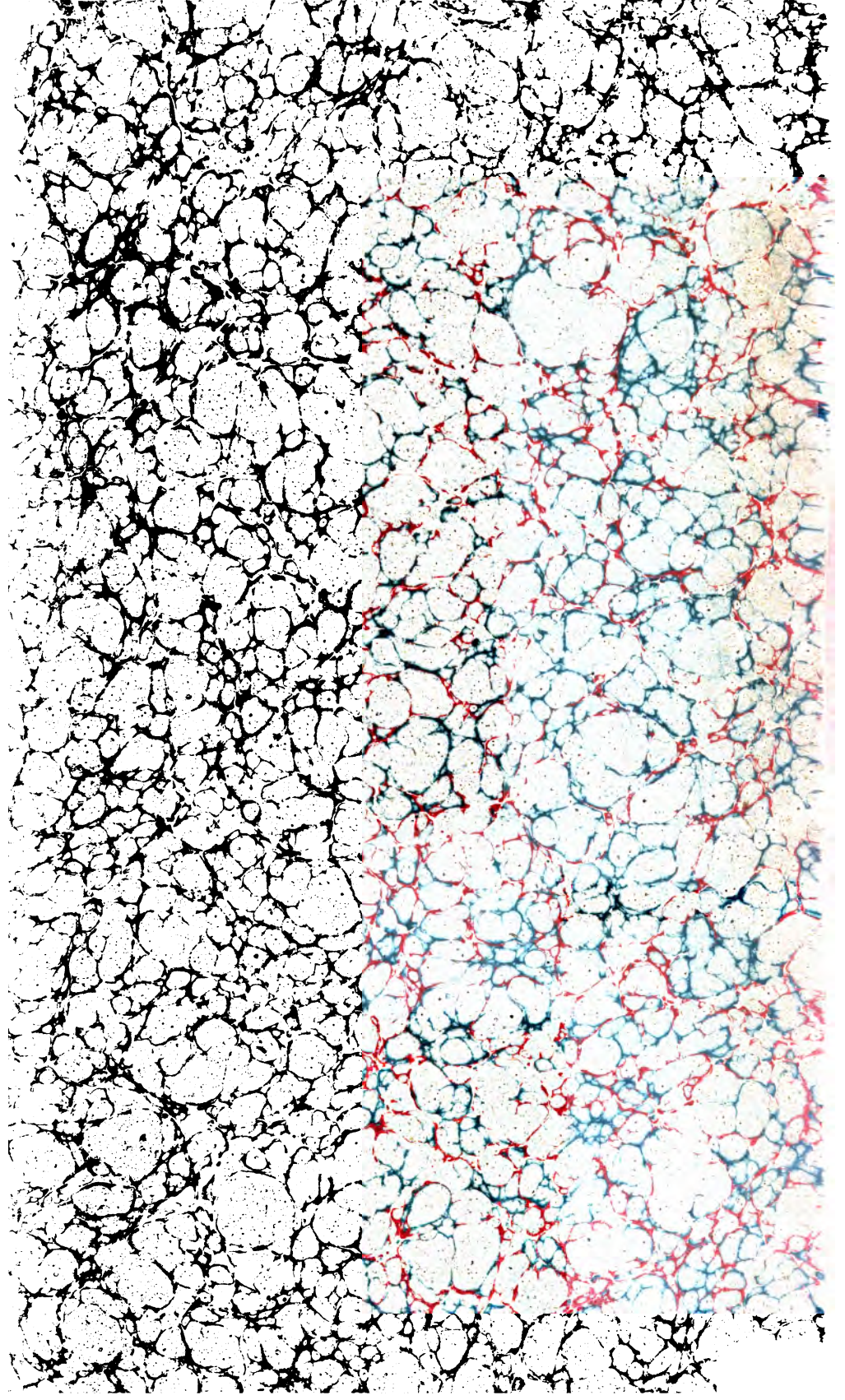
32.10

Math 3708.66

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)

Rec'd 20 Sept. 1871.

SCIENCE CENTER LIBRARY



TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

Dr. O. J. BROCH,

Professeur de Mathématiques à l'Université Royale de Christiania.

For the proper title-page and table of contents see after p. 142.

PREMIER FASCICULE.

C. CHRISTIANIA.

LIBRAIRIE DE P. T. MALLING.

BRØGGER & CHRISTIE, IMPRIMEURS.

1866.

Math 3708.66

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Chapitre premier.

Définitions et théorème fondamental d'ABEL sur l'addition des intégrales elliptiques.

1. Dans l'intégrale définie

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

où $x = \sin\varphi$, on considère φ, x, $\sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{1-k^2x^2}$ comme fonctions de u, chacun des radicaux $\sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{1-k^2x^2}$ avec le signe qu'il aura à la fin de l'intégration, en supposant qu'il commence pour $x = o$ par la valeur positive $+1$. On les nomme *fonctions elliptiques* de u, et cette dernière *intégrale elliptique* de x et de φ.

La constante k est nommée le module de l'intégrale u ou des fonctions elliptiques φ, x, $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1-k^2x^2}$. La quantité $\sqrt{1-k^2}$ est nommée le *module complémentaire* et désignée par k'. On a donc entre les deux modules l'équation: $k^2 + k'^2 = 1$.

Pour bien fixer les valeurs des modules k et k', le carré k^2 étant donné, nous choisirons les signes des racines carrées de k^2 et k'^2 tels que, si k^2 ou k'^2 sont réelles et positives, k ou k' seront positives; si k^2 ou k'^2 est réelle mais négative, on choisira le signe de k tel que: $k = \frac{\sqrt{-k^2}}{i} = -i\sqrt{-k^2}$, et de k' tel que: $k' = \frac{\sqrt{-k'^2}}{i} = -i\sqrt{-k'^2}$, i désignant l'index imaginaire $\sqrt{-1}$; enfin si k^2 et k'^2 sont imaginaires, on choisira le signe de k et de k' tel que leurs parties réelles seront positives.

L'arc φ est nommé *l'amplitude de* u; x est donc *le sinus de l'amplitude de* u, et $\sqrt{1-x^2}$ *le cosinus de l'amplitude de* u; $\sqrt{1-k^2x^2}$ est nommée *le Delta de l'amplitude de* u. L'intégrale u est nommée *l'argument dont l'amplitude est* φ, ou *l'argument dont le sinus de l'amplitude est* x.

On désigne ces fonctions par les abréviations suivantes:

$$\varphi = \text{am}(u,k), \text{ ou simplement am u},$$
$$x = \sin\text{am}(u,k), \text{ ou simplement sin am u},$$
$$\sqrt{1-x^2} = \cos\text{am}(u,k), \text{ ou simplement cos am u},$$
$$\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta\text{ am}(u,k), \text{ ou simplement } \Delta \text{ am u},$$
$$u = \arg\text{am}(\varphi,k) = \arg\sin\text{am}(x,k), \text{ ou simplement} = \arg\text{am}\,\varphi = \arg\sin\text{am}\,x.$$

2. Si l'on fait pour abréger $\sqrt{1-x^2} = y$, $\sqrt{1-k^2x^2} = z$, on aura: $dx = -\frac{ydy}{x} = -\frac{zdz}{k^2x}$, et par conséquent:

$$du = \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{dx}{yz} = -\frac{dy}{xz} = -\frac{dz}{k^2xy}.$$

De là on trouve les différentielles:

$$d\varphi = \Delta\varphi \,.\, du, \text{ ou } d(\text{am u}) = \Delta\text{ am u} \,.\, du,$$
$$dx = yz \,.\, du, \text{ on } d(\sin\text{am u}) = \cos\text{am u} \,.\, \Delta\text{ am u} \,.\, du,$$
$$dy = -xz \,.\, du, \text{ ou } d(\cos\text{am u}) = -\sin\text{am u} \,.\, \Delta\text{ am u} \,.\, du,$$
$$dz = -k^2xy \,.\, du, \text{ on } d(\Delta\text{ am u}) = -k^2\sin\text{am u} \,.\, \cos\text{am u} \,.\, du.$$

3. Considérons les trois équations:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1(a+x_1^2) + b\sqrt{1-x_1^2}\,.\,\sqrt{1-k^2x_1^2} = 0, \\ x_2(a+x_2^2) + b\sqrt{1-x_2^2}\,.\,\sqrt{1-k^2x_2^2} = 0, \\ x_3(a+x_3^2) + b\sqrt{1-x_3^2}\,.\,\sqrt{1-k^2x_3^2} = 0. \end{cases}$$

Les quantités x_1, x_2 et x_3 satisfont alors toutes à l'équation:

$$x(a+x^2) + b\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-k^2x^2} = 0,$$

ou x_1^2, x_2^2, x_3^2 sont les racines de l'équation du troisième degré par rapport à x^2:

$$(2)\qquad x^2(a+x^2)^2 - b^2(1-x^2)(1-k^2x^2) = 0.$$

On a par conséquent:

$$x^2(a+x^2)^2 - b^2(1-x^2)(1-k^2x^2) = x^6 - (b^2k^2-2a)x^4 + (a^2+b^2+b^2k^2)x^2 - b^2 =$$
$$= (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2),$$

et de là:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b^2k^2 - 2a, \\ x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^2x_2^2 = a^2 + b^2 + b^2k^2, \\ x_1^2x_2^2x_3^2 = b^2, \end{cases}$$

Les cinq quantités x_1, x_2, x_3, a et b étant liées par les trois équations (1) ou (3), les signes de x_1, x_2 et x_3 étant toujours déterminés par les équations (1), on peut en considérer deux quelconques comme variables

indépendantes, et déterminer les trois autres en fonctions de ceux-ci. Considérons donc a et b comme les variables indépendantes. Si l'on pose pour abréger:

$$\varphi(x) = x^2(a + x^2)^2 - b^2(1-x^2)(1-k^2x^2),$$

on aura: $\varphi(x_1) = o,\ \varphi(x_2) = o,\ \varphi(x_3) = o.$

Différentions ces équations. En désignant par $\varphi'(x)$ la dérivée de $\varphi(x)$ par rapport à x seule, a et b étant considérées comme constantes, on trouvera:

$$d\varphi(x_1) = \varphi'(x_1) \cdot dx_1 + d_a\varphi(x_1) \cdot da + d_b\varphi(x_1) \cdot db =$$
$$= \varphi'(x_1) \cdot dx_1 + 2x_1^2(a + x_1^2) \cdot da - 2b(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2) \cdot db = o,$$

et de là:

$$\varphi'(x_1) \cdot dx_1 = -2x_1^2(a + x_1^2) \cdot da + 2b(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2) \cdot db.$$

En vertu de la prémière équation (1) on a maintenant:

$$x_1(a + x_1^2) = -b\sqrt{1-x_1^2} \cdot \sqrt{1-k^2x_1^2},$$
$$b(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2) = -x_1(a + x_1^2) \cdot \sqrt{1-x_1^2} \cdot \sqrt{1-k^2x_1^2},$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation précédente on trouvera:

$$\varphi'(x_1) \cdot dx_1 = (2bx_1 \cdot da - 2x_1(a + x_1^2) \cdot db) \cdot \sqrt{1-x_1^2} \cdot \sqrt{1-k^2x_1^2},$$

$$\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2} \cdot \sqrt{1-k^2x_1^2}} = \frac{2x_1(b \cdot da - a \cdot db) - 2x_1^3 \cdot db}{\varphi'(x_1)},$$

De même on aura:

$$\frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2} \cdot \sqrt{1-k^2x_2^2}} = \frac{2x_2(b \cdot da - a \cdot db) - 2x_2^3 \cdot db}{\varphi'(x_2)},$$

$$\frac{dx_3}{\sqrt{1-x_3^2} \cdot \sqrt{1-k^2x_3^2}} = \frac{2x_3(b \cdot da - a \cdot db) - 2x_3^3 \cdot db}{\varphi'(x_3)},$$

et en ajoutant ces trois équations:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2} \cdot \sqrt{1-k^2x_1^2}} + \frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2} \cdot \sqrt{1-k^2x_2^2}} + \frac{dx_3}{\sqrt{1-x_3^2} \cdot \sqrt{1-k^2x_3^2}} =$$
$$= 2\left\{\frac{x_1}{\varphi'(x_1)} + \frac{x_2}{\varphi'(x_2)} + \frac{x_3}{\varphi'(x_3)}\right\} \cdot (b \cdot da - a \cdot db) - 2\left\{\frac{x_1^3}{\varphi'(x_1)} + \frac{x_2^3}{\varphi'(x_2)} + \frac{x_3^3}{\varphi'(x_3)}\right\} \cdot db.$$

On a maintenant:

$$\varphi(x) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2);$$

et en différentiant par rapport à x:

$$\varphi'(x) = 2x(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2) + 2x(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_3^2) + 2x(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2).$$

De là on trouve:

$$\frac{x_1}{\varphi'(x_1)} = \frac{1}{2(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)}; \quad \frac{x_1^3}{\varphi'(x_1)} = \frac{x_1^2}{2(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_3^2)};$$

$$\frac{x_2}{\varphi'(x_2)} = \frac{1}{2(x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)}; \quad \frac{x_2^3}{\varphi'(x_2)} = \frac{x_2^2}{2(x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 - x_3^2)};$$

$$\frac{x_3}{\varphi'(x_3)} = \frac{1}{2(x_3^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_2^2)}; \quad \frac{x_3^3}{\varphi'(x_3)} = \frac{x_3^2}{2(x_3^2 - x_1^2)(x_3^2 - x_2^2)}.$$

En ajoutant et réduisant au même dénominateur, on aura donc:

$$\frac{x_1}{\varphi'(x_1)}+\frac{x_2}{\varphi'(x_2)}+\frac{x_3}{\varphi'(x_3)}=\frac{(x_2^2-x_3^2)-(x_1^2-x_3^2)+(x_1^2-x_2^2)}{2(x_1^2-x_2^2)(x_1^2-x_3^2)(x_2^2-x_3^2)}=0,$$

$$\frac{x_1^3}{\varphi'(x_1)}+\frac{x_2^3}{\varphi'(x_2)}+\frac{x_3^3}{\varphi'(x_3)}=\frac{x_1^2(x_2^2-x_3^2)-x_2^2(x_1^2-x_3^2)+x_3^2(x_1^2-x_2^2)}{2(x_1^2-x_2^2)(x_1^2-x_3^2)(x_2^2-x_3^2)}=0,$$

et par conséquent:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}.\sqrt{1-k^2x_1^2}}+\frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2}.\sqrt{1-k^2x_2^2}}+\frac{dx_3}{\sqrt{1-x_3^2}.\sqrt{1-k^2x_3^2}}=0.$$

En intégrant depuis $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, on trouvera:

$$\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}+\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}+\int_0^{x_3}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}=C,$$

C désignant une constante. Pour la déterminer on remarquera que pour $x_1=0$ et $x_2=0$ on aura en vertu des équations (1) $b=0$, et de là en vertu de la seconde équation (3) $a=0$, et en vertu de la première équation (3): $x_3=0$. Donc on aura $C=0$, et:

$$\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}+\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}+\int_0^{x_3}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}=0,$$

où x_1, x_2, x_3 sont liées par les équations (1).

Si l'on pose $x_3=-\xi$, la dernière équation et les équations (1) donnent lieu au théorème suivant sur l'additiou des intégrales elliptiques:

Si les trois quantités x_1, x_2 et ξ sont liées entre elles par les équations:

$$(4)\quad\begin{cases}x_1(a+x_1^2)+b\sqrt{1-x_1^2}.\sqrt{1-k^2x_1^2}=0,\\ x_2(a+x_2^2)+b\sqrt{1-x_2^2}.\sqrt{1-k^2x_2^2}=0,\\ \xi(a+\xi^2)-b\sqrt{1-\xi^2}.\sqrt{1-k^2\xi^2}=0,\end{cases}$$

l'intégrale elliptique de ξ sera la somme des intégrales elliptiques de x_1 et de x_2, ou l'on aura entre ces trois quantités l'équation:

$$(5)\quad\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}+\int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}=\int_0^{\xi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}.$$

4. Si l'on pose pour abréger:

$$\sqrt{1-x_1^2}=y_1,\ \sqrt{1-k^2x_1^2}=z_1,\ \sqrt{1-x_2^2}=y_2,\ \sqrt{1-k^2x_2^2}=z_2,\ \sqrt{1-\xi^2}=\eta,\ \sqrt{1-k^2\xi^2}=\zeta,$$

les équations (4) précédentes deviendront:

$$(1)\quad\begin{cases}x_1(a+x_1^2)+by_1z_1=0,\\ x_2(a+x_2^2)+by_2z_2=0,\\ \xi(a+\xi^2)-b\eta\zeta=0.\end{cases}$$

Des deux premières de ces équations on tire:

$$(2)\quad a=\frac{x_2^3y_1z_1-x_1^3y_2z_2}{x_1y_2z_2-x_2y_1z_1},\quad b=\frac{x_1x_2(x_1^2-x_2^2)}{x_1y_2z_2-x_2y_1z_1}.$$

En substituant ces valeurs de a et b dans la dernière des équations (1) on trouvera ξ. Mais on en déduira plus facilement la valeur numérique de la dernière des équations (3) du 3: $x_1^2 x_2^2 \xi^2 = b^2$, de laquelle on trouve: $\xi = \pm \frac{b}{x_1 x_2}$. Le signe de ξ sera déterminé par l'équation (1): $\xi(a + \xi^2) - b\eta\zeta = o$, en remarquant que pour des valeurs évanouissantes de x_1 et x_2, ξ s'évanouira en même temps, et que y_1, z_1, y_2, z_2, η et ζ s'approcheront de + 1. Alors a s'approchera de la valeur: $\frac{x_2^3 - x_1^3}{x_1 - x_2} = -(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$, et b de la valeur: $\frac{x_1x_2(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2} = x_1x_2(x_1 + x_2)$, et par conséquent: $a + \xi^2 = a + \frac{b^2}{x_1^2x_2^2}$ de la valeur: $-(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)^2 = x_1x_2$. L'équation: $\xi(a + \xi^2) - b\eta\zeta = o$, s'approchera alors de: $\xi x_1x_2 - b = o$, donc: $\xi = + \frac{b}{x_1x_2}$. En substituant la valeur de b on aura enfin:

$$(3) \qquad \xi = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1y_2z_2 - x_2y_1z_1}.$$

On peut trouver les valeurs de $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$, et de $\zeta = \sqrt{1 - k^2\xi^2}$ en y substituant la valeur de ξ. Mais on les trouvera plus facilement en retournant à l'équation (2) du 3: $x^2(a + x^2)^2 - b^2(1 - x^2)(1 - k^2x^2) = o$, et remarquant que le premier membre de cette équation est en même temps une fonction de y^2 et de z^2, et que ses trois racines seront alors: y_1^2, y_2^2, η^2, et z_1^2, z_2^2, ζ^2. En y substituant $y^2 = 1 - x^2$, $x^2 = 1 - y^2$, cette équation deviendra:

$$(1 - y^2)(a + 1 - y^2)^2 - b^2y^2(k'^2 + k^2y^2) = o = -(y^2 - y_1^2)(y^2 - y_2^2)(y^2 - \eta^2).$$

De là on tire: $y_1^2y_2^2\eta^2 = (a + 1)^2$, $\eta = \pm \frac{a+1}{y_1y_2}$. Pour déterminer ici le signe, on fait $x_1 = o$, $x_2 = o$. On a alors $y_1 = + 1$, $y_2 = + 1$, et comme nous avons vu plus haut: $a = o$, $\xi = o$, et de là: $\eta = + 1$. Donc on doit avoir: $\eta = + \frac{a+1}{y_1y_2}$. En substituant la valeur de a de l'équation (2): $a = \frac{x_2^3y_1z_1 - x_1^3y_2z_2}{x_1y_2z_2 - x_2y_1z_1}$, on aura: $a + 1 = \frac{x_1y_1^2y_2z_2 - x_2y_1y_2^2z_1}{x_1y_2z_2 - x_2y_1z_1}$, et de là:

$$(4) \qquad \eta = \frac{x_1y_1z_2 - x_2y_2z_1}{x_1y_2z_2 - x_2y_1z_1}.$$

De même en substituant dans l'équation (2) du 3: $z^2 = 1 - k^2x^2$, $x^2 = \frac{1 - z^2}{k^2}$, on aura une équation en z^2, dont les trois racines seront z_1^2, z_2^2 et ζ^2:

$$\frac{(1 - z^2)(ak^2 + 1 - z^2)^2}{k^6} - \frac{b^2(k^2 - 1 + z^2)z^2}{k^2} = o = -\frac{1}{k^6}(z^2 - z_1^2)(z^2 - z_2^2)(z^2 - \zeta^2).$$

De là on tire: $z_1^2z_2^2\zeta^2 = (ak^2 + 1)^2$, $\zeta = \pm \frac{ak^2 + 1}{z_1z_2}$. Pour déterminer ici le signe, on fait comme auparavant:

$x_1 = o$, $x_2 = o$, d'où: $z_1 = + 1$, $z_2 = + 1$, $a = o$, $\xi = o$, $\zeta = + 1$.

Donc on doit avoir: $\zeta = + \frac{ak^2+1}{z_1 z_2}$. En substituant la valeur de a de l'équation (2):

$a = \frac{x_2^3 y_1 z_1 - x_1^3 y_2 z_2}{x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1}$, on aura: $ak^2 + 1 = \frac{x_1 y_2 z_1^2 z_2 - x_2 y_1 z_1 z_2^2}{x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1}$, et de là:

$$(5) \qquad \zeta = \frac{x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_2}{x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1}.$$

5. On peut mettre les trois formules de ξ, η, ζ, sous autres formes en multipliant les numérateurs et les dénominateurs des fractions, soit avec: $x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1$, soit avec: $x_1 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1$, soit avec: $x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_2$.

En remarquant que:

$$y_2^2 - y_1^2 = x_1^2 - x_2^2, \quad z_2^2 - z_1^2 = k^2(x_1^2 - x_2^2),$$

$$y_2^2 z_1^2 - y_1^2 z_2^2 = k^2(x_1^2 - x_2^2), \quad x_1^2 z_2^2 - x_2^2 z_1^2 = x_1^2 - x_2^2, \quad x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 = x_1^2 - x_2^2,$$

on trouvera:

$$(x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1)(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1) = x_1^2 y_2^2 z_2^2 - x_2^2 y_1^2 z_1^2 = x_1^2 y_2^2 - k^2 x_1^2 x_2^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 + k^2 x_1^2 x_2^2 y_1^2$$
$$= (x_1^2 - x_2^2)(1 - k^2 x_1^2 x_2^2),$$

$$(x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1)(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1) = x_1^2 y_1 y_2 z_2^2 - x_1 x_2 y_2^2 z_1 z_2 + x_1 x_2 y_1^2 z_1 z_2 - x_2^2 y_1 y_2 z_1^2 =$$
$$= (x_1^2 - x_2^2)(y_1 y_2 - x_1 x_2 z_1 z_2),$$

$$(x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_2)(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1) = x_1^2 y_2^2 z_1 z_2 - x_1 x_2 y_1 y_2 z_2^2 + x_1 x_2 y_1 y_2 z_1^2 - x_2^2 y_1^2 z_1 z_2 =$$
$$= (x_1^2 - x_2^2)(z_1 z_2 - k^2 x_1 x_2 y_1 y_2),$$

$$(x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1)(x_1 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) = x_1^2 y_1 y_2 z_2^2 - x_1 x_2 y_1^2 z_1 z_2 + x_1 x_2 y_2^2 z_1 z_2 - x_2^2 y_1 y_2 z_1^2 =$$
$$= (x_1^2 - x_2^2)(y_1 y_2 + x_1 x_2 z_1 z_2),$$

$$(x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1)(x_1 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) = x_1^2 y_1^2 z_2^2 - x_2^2 y_2^2 z_1^2 = \frac{1 - z_1^2}{k^2} \cdot y_1^2 z_2^2 - \frac{1 - z_2^2}{k^2} \cdot y_2^2 z_1^2 =$$
$$= (x_1^2 - x_2^2) \cdot \frac{z_1^2 z_2^2 - k^2}{k^2} = (x_1^2 - x_2^2)(y_2^2 - x_1^2 z_2^2) = (x_1^2 - x_2^2)(y_1^2 - x_2^2 z_1^2),$$

$$(x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_2)(x_1 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) = x_1^2 y_1 y_2 z_1 z_2 - x_1 x_2 y_1^2 z_2^2 + x_1 x_2 y_2^2 z_1^2 - x_2^2 y_1 y_2 z_1 z_2 =$$
$$= (x_1^2 - x_2^2)(y_1 y_2 z_1 z_2 + k^2 x_1 x_2);$$

$$(x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1)(x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_2) = x_1^2 y_2^2 z_1 z_2 - x_1 x_2 y_1 y_2 z_1^2 + x_1 x_2 y_1 y_2 z_2^2 - x_2^2 y_1^2 z_1 z_2 =$$
$$= (x_1^2 - x_2^2)(z_1 z_2 + k^2 x_1 x_2 y_1 y_2),$$

$$(x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1)(x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_2) = x_1^2 y_1 y_2 z_1 z_2 - x_1 x_2 y_2^2 z_1^2 + x_1 x_2 y_1^2 z_2^2 - x_2^2 y_1 y_2 z_1 z_2 =$$
$$= (x_1^2 - x_2^2)(y_1 y_2 z_1 z_2 - k^2 x_1 x_2),$$

$$(x_1 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_2)(x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1) = x_1^2 y_2^2 z_1^2 - x_2^2 y_1^2 z_2^2 = (1 - y_1^2) y_2^2 z_1^2 - (1 - y_2^2) y_1^2 z_2^2 =$$
$$= (x_1^2 - x_2^2)(k^2 + k^2 y_1^2 y_2^2) = (x_1^2 - x_2^2)(z_1^2 - k^2 x_2^2 y_1^2) = (x_1^2 - x_2^2)(z_2^2 - k^2 x_1^2 y_2^2).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (3), (4) et (5) du paragraphe précédent on aura:

$$(1) \quad \xi = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1} = -\frac{1}{k^2} \cdot \frac{z_1^2 - z_2^2}{x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1} =$$

$$= \frac{x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2} = \frac{x_1 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1}{y_1 y_2 + x_1 x_2 z_1 z_2} = \frac{x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_2}{z_1 z_2 + k^2 x_1 x_2 y_1 y_2},$$

$$(2)\quad \eta = \frac{x_1y_1z_2 - x_2y_2z_1}{x_1y_2z_2 - x_2y_1z_1} = \frac{y_1y_2 - x_1x_2z_1z_2}{1 - k^2x_1^2x_2^2} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{z_1^2z_2^2 - k'^2}{y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2} =$$

$$= \frac{y_2^2 - x_1^2z_2^2}{y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2} = \frac{y_1^2 - x_2^2z_1^2}{y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2} = \frac{y_1y_2z_1z_2 - k'^2x_1x_2}{z_1z_2 + k^2x_1x_2y_1y_2},$$

$$(3)\quad \zeta = \frac{x_1y_2z_1 - x_2y_1z_2}{x_1y_2z_2 - x_2y_1z_1} = \frac{z_1z_2 - k^2x_1x_2y_1y_2}{1 - k^2x_1^2x_2^2} = \frac{y_1y_2z_1z_2 + k'^2x_1x_2}{y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2} =$$

$$= \frac{k'^2 + k^2y_1^2y_2^2}{z_1z_2 + k^2x_1x_2y_1y_2} = \frac{z_1^2 - k^2x_2^2y_1^2}{z_1z_2 + k^2x_1x_2y_1y_2} = \frac{z_2^2 - k^2x_1^2y_2^2}{z_1z_2 + k^2x_1x_2y_1y_2}.$$

6. Si l'on change le signe de x_2, on aura des formules pour la différence de deux intégrales elliptiques. En désignant par ξ', η', ζ' les valeurs correspondantes de ξ, η, ζ, on trouvera:

$$(1)\quad \int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} - \int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^{\xi'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}},$$

où:

$$(2)\quad \xi' = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1y_2z_2 + x_2y_1z_1} = -\frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1y_2z_2 + x_2y_1z_1} = -\frac{1}{k^2}\cdot\frac{z_1^2 - z_2^2}{x_1y_2z_2 + x_2y_1z_1} =$$

$$= \frac{x_1y_2z_2 - x_2y_1z_1}{1 - k^2x_1^2x_2^2} = \frac{x_1y_1z_2 - x_2y_2z_1}{y_1y_2 - x_1x_2z_1z_2} = \frac{x_1y_2z_1 - x_2y_1z_2}{z_1z_2 - k^2x_1x_2y_1y_2},$$

$$(3)\quad \eta' = \frac{x_1y_1z_2 + x_2y_2z_1}{x_1y_2z_2 + x_2y_1z_1} = \frac{y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2}{1 - k^2x_1^2x_2^2} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{z_1^2z_2^2 - k'^2}{y_1y_2 - x_1x_2z_1z_2} =$$

$$= \frac{y_2^2 - x_1^2z_2^2}{y_1y_2 - x_1x_2z_1z_2} = \frac{y_1^2 - x_2^2z_1^2}{y_1y_2 - x_1x_2z_1z_2} = \frac{y_1y_2z_1z_2 + k'^2x_1x_2}{z_1z_2 - k^2x_1x_2y_1y_2},$$

$$(4)\quad \zeta' = \frac{x_1y_2z_1 + x_2y_1z_2}{x_1y_2z_2 + x_2y_1z_1} = \frac{z_1z_2 + k^2x_1x_2y_1y_2}{1 - k^2x_1^2x_2^2} = \frac{y_1y_2z_1z_2 - k'^2x_1x_2}{y_1y_2 - x_1x_2z_1z_2} =$$

$$= \frac{k'^2 + k^2y_1^2y_2^2}{z_1z_2 - k^2x_1x_2y_1y_2} = \frac{z_1^2 - k^2x_2^2y_1^2}{z_1z_2 - k^2x_1x_2y_1y_2} = \frac{z_2^2 - k^2x_1^2y_2^2}{z_1z_2 - k^2x_1x_2y_1y_2}.$$

7. Soit: $$\int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = u, \quad \int_0^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = v,$$

on aura: $$\int_0^{\xi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = u + v, \int_0^{\xi'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = u - v,$$

et de là:

$$x_1 = \sin\operatorname{am} u, \quad y_1 = \cos\operatorname{am} u, \quad z_1 = \Delta\operatorname{am} u,$$
$$x_2 = \sin\operatorname{am} v, \quad y_2 = \cos\operatorname{am} v, \quad z_2 = \Delta\operatorname{am} v,$$
$$\xi = \sin\operatorname{am}(u+v), \eta = \cos\operatorname{am}(u+v), \zeta = \Delta\operatorname{am}(u+v),$$
$$\xi' = \sin\operatorname{am}(u-v), \eta' = \cos\operatorname{am}(u-v), \zeta' = \Delta\operatorname{am}(u-v).$$

Les formules des deux paragraphes précédents donnent par conséquent les fonctions elliptiques d'une somme et d'une différence de deux arguments exprimées par les fonctions elliptiques de chacune d'elles.

On en remarque en particulier ceux dont le dénominateur est rationnel en x_1 et x_2, c'est à dire la quatrième valeur de ξ et de ξ' et la seconde de η, η', ζ et ζ'. Elles sont:

$$(1)\begin{cases}\sin am(u+v) = \dfrac{\sin am\,u\,.\cos am\,v\,.\Delta am\,v + \sin am\,v\,.\cos am\,u\,.\Delta am\,u}{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\sin^2 am\,v},\\ \cos am(u+v) = \dfrac{\cos am\,u\,.\cos am\,v - \sin am\,u\,.\sin am\,v\,.\Delta am\,u\,.\Delta am\,v}{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\sin^2 am\,v},\\ \Delta am(u+v) = \dfrac{\Delta am\,u\,.\Delta am\,v - k^2\sin am\,u\,.\sin am\,v\,.\cos am\,u\,.\cos am\,v}{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\sin^2 am\,v}.\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\sin am(u-v) = \dfrac{\sin am\,u\,.\cos am\,v\,.\Delta am\,v - \sin am\,v\,.\cos am\,u\,.\Delta am\,u}{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\sin^2 am\,v},\\ \cos am(u-v) = \dfrac{\cos am\,u\,.\cos am\,v + \sin am\,u\,.\sin am\,v\,.\Delta am\,u\,.\Delta am\,v}{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\sin^2 am\,v},\\ \Delta am(u-v) = \dfrac{\Delta am\,u\,.\Delta am\,v + k^2\sin am\,u\,.\sin am\,v\,.\cos am\,u\,.\cos am\,v}{1-k^2\sin^2 am\,u\,.\sin^2 am\,v}.\end{cases}$$

8. Au lieu de sortir dans le paragraphe 3 de l'équation: $x(a+x^2)+byz=o$, on aurait pu sortir de l'équation: $y(a+x^2)+bxz=o$, ou de l'équation: $z(a+x^2)+bxy=o$. De chacune de ces équations on trouvera de même: $\dfrac{dx_1}{y_1z_1}+\dfrac{dx_2}{y_2z_2}+\dfrac{dx_3}{y_3z_3}=o$. Mais en intégrant depuis zéro, la constante ne sera plus zéro, mais dans le cas de l'équation: $y(a+x^2)+bxz=o$, égale à l'intégrale définie: $\int_0^1\dfrac{dx}{yz}$, et dans le cas de l'équation: $z(a+x^2)+bxy=o$ égale à l'intégrale définie: $\int_0^{\frac{1}{k}}\dfrac{dx}{yz}$. On trouvera de cette manière des formules analogues à celles du paragraphe précédent pour des fonctions elliptiques de: $u+v-\int_0^1\dfrac{dx}{yz}$, et de $u+v-\int_0^{\frac{1}{k}}\dfrac{dx}{yz}$. Nous montreront plus tard, dans le quatrième chapitre, d'une autre manière comment ces formules se déduisent facilement des formules du paragraphe précédent.

9. Le théorème d'addition du 3 est donné par *Abel* pour une somme d'un nombre quelconque d'arguments. Au lieu de l'équation: $x(a+x^2)+byz=o$, il considère alors l'équation plus générale:

$$f(x)+F(x).yz=o,$$

où $f(x)$ et $F(x)$ sont deux fonctions entières de x, l'une paire, l'autre impaire.

Supposons donc que $x_1, x_2, \ldots x_n$ satisfassent aux équations: (1) $f(x_1)+F(x_1).y_1z_1=o$, $f(x_2)+F(x_2).y_2z_2=o$, $\ldots f(x_n)+F(x_n)y_nz_n=o$. Les carrés $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ sont alors racines de l'équation en x^2: $(f(x))^2-(F(x))^2(1-x^2)(1-k^2x^2)=o$, et nous supposerons que le degré

de cette équation en x^2 soit précisément n, ou que x_1^2, x_2^2, . . . x_n^2 représentent toutes les racines de cette équation. Cela aura lieu si f(x) est du degré n et F(x) du degré n—3; ou bien si f(x) est du degré n—1 et F(x) du degré n— 2. On aura alors l'équation:

$$(2)\varphi(x) = (f(x))^2 - (F(x))^2 . (1-x^2)(1-k^2x^2) = A(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2) \ldots . (x^2-x_n^2),$$

où A est une quantité indépendante de x.

On aura alors: $\varphi(x_1) = o$, $\varphi(x_2) = o$, ... $\varphi(x_n) = o$. Si l'on désigne maintenant par $\varphi'(x)$ la dérivée de $\varphi(x)$ par rapport à x seul, lorsque les coefficients de f(x) et de F(x) sont considérés comme constants, et par $\delta f(x)$ et $\delta F(x)$ les différentielles de f(x) et de F(x) par rapport à ces coefficients considérés comme les seules variables, on aura la différentielle totale de l'équation $\varphi(x_1) = o$:

$$d\varphi(x_1) = \varphi'(x_1) . dx_1 + 2f(x_1) . \delta f(x_1) - 2F(x_1) . \delta F(x_1) . (1-x_1^2)(1-k^2x_1^2) = o$$

et de là:

$$\varphi'(x_1) . dx_1 = - 2f(x_1) . \delta f(x_1) + 2F(x_1) . \delta F(x_1) . (1-x_1^2)(1-k^2x_1^2).$$

Maintenant en vertu de la première des équations (1):

$$f(x_1) + F(x_1) . \sqrt{1-x_1^2} . \sqrt{1-k^2x_1^2} = o, \text{ on a:}$$

$$f(x_1) = - F(x_1) . \sqrt{1-x_1^2} . \sqrt{1-k^2x_1^2},$$

$$F(x_1) . (1-x_1^2)(1-k^2x_1^2) = - f(x_1) . \sqrt{1-x_1^2} . \sqrt{1-k^2x_1^2}.$$

Donc on aura:

$$\varphi'(x_1) . dx_1 = 2(F(x_1) . \delta f(x_1) - f(x_1) . \delta F(x_1)) . \sqrt{1-x_1^2} . \sqrt{1-k^2x_1^2},$$

et de là:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2} . \sqrt{1-k^2x_1^2}} = \frac{dx_1}{y_1 z_1} = \frac{2(F(x_1) . \delta f(x_1) - f(x_1) . \delta F(x_1))}{\varphi'(x_1)}$$

De même on aura:

$$\frac{dx_2}{y_2 z_2} = \frac{2(F(x_2) . \delta f(x_2) - f(x_2) . \delta F(x_2))}{\varphi'(x_2)}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{dx_n}{y_n z_n} = \frac{2(F(x_n) . \delta f(x_n) - f(x_n) . \delta F(x_n))}{\varphi'(x_n)}$$

et en ajoutant on aura:

$$\frac{dx_1}{y_1 z_1} + \frac{dx_2}{y_2 z_2} + \ldots + \frac{dx_n}{y_n z_n} = 2 . \sum_1^n{}_p \frac{F(x_p) . \delta f(x_p) - f(x_p) . \delta F(x_p)}{\varphi'(x_p)}.$$

Maintenant $\varphi(x)$ est une fonction entière et paire de x du degré 2n, donc $\varphi'(x)$ sera une fonction entière et impaire de x du degré 2n — 1. Les différentielles $\delta f(x)$ et $\delta F(x)$ sont des fonctions de la même forme, paires ou impaires, et du même degré que f(x) et F(x); donc $F(x) . \delta f(x)$ et $f(x) . \delta F(x)$ seront des fonctions impaires de x du degré 2n—3, et de même leur dif-

férence: $F(x).\delta f(x) - f(x).\delta F(x)$ sera une fonction impaire de x du degré: $2n-3$.

On peut alors décomposer la fonction fractionnaire: $\frac{F(x).\delta f(x) - f(x).\delta F(x)}{\varphi(x)}$, dont le numerateur est une fonction impaire du degré 2n–3, le dénominateur une fonction paire du degré 2n, dans les fractions simples:

$$\frac{F(x).\delta f(x) - f(x).\delta F(x)}{\varphi(x)} = \sum_1^n{}_p\left(\frac{A_p}{x+x_p} + \frac{B_p}{x-x_p}\right),$$

où: $A_p = B_p = \frac{F(x_p).\delta f(x_p) - f(x_p).\delta F(x_p)}{\varphi'(x_p)}$.

Donc on aura:

$$\frac{F(x).\delta f(x) - f(x).\delta F(x)}{\varphi(x)} = 2\sum_1^n{}_p\frac{xA_p}{x^2-x_p^2} = 2x\sum_1^n{}_p\frac{F(x_p).\delta f(x_p) - f(x_p).\delta F(x_p)}{(x^2-x_p^2).\varphi'(x_p)},$$

et en multipliant par x:

$$\frac{x(F(x).\delta f(x) - f(x).\delta F(x))}{\varphi(x)} = 2\sum_1^n{}_p\frac{F(x_p).\delta f(x_p) - f(x_p).\delta F(x_p)}{\left(1-\frac{x_p^2}{x^2}\right).\varphi'(x_p)}$$

Si l'on fait ici croître x indéfiniment, le premier membre de cette équation, dont le numerateur est du degré 2n–2 et le dénominateur du degré 2n, convergera vers zéro. Donc on aura:

$$\sum_1^n{}_p\frac{F(x_p).\delta f(x_p) - f(x_p).\delta F(x_p)}{\varphi'(x_p)} = 0,$$

et par conséquent:

$$\frac{dx_1}{y_1z_1} + \frac{dx_2}{y_2z_2} + \ldots + \frac{dx_n}{y_nz_n} = 0,$$

et de là en intégrant depuis $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... $x_n = 0$:

$$(3)\quad \int_0^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} + \int_0^{x_2}\frac{dx_2}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} + \ldots + \int_0^{x_n}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = C,$$

où C désigne une constante, c'est à dire une fonction de k.

Le nombre des coefficients dans les fonctions f(x) et F(x) peut toujours être réduit à n—1, puisque dans les équations (1) on peut faire disparaître un des coefficients. Ces n–1 coefficients sont déterminés en fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ par les n—1 premières des équations (1), équations linéaires par rapport à ces coefficients. Les quantités: x_n, $y_n = \sqrt{1-x_n^2}$ et $z_n = \sqrt{1-k^2x_n^2}$ seront alors déterminées par la dernière des équations (1). A leurs signes près on peut aussi les déterminer à l'aide de l'équation (2). En effet si dans l'équation (2):

$$(2)\quad (f(x))^2-(F(x))^2.(1-x^2)(1-k^2x^2) = A(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\ldots.(x^2-x_{n-1}^2)(x^2-x_n^2)$$

on pose $x = 0$, on trouvera, si f(x) est une fonction paire et F(x) une fonction impaire: $F(o) = o$, et:

$(f(o))^2 = (-1)^n A . x_1^2 . x_2^2 \ldots x_{n-1}^2 . x_n^2$, et de là: $x_n^2 = \frac{(-1)^n (f(o))^2}{A . x_1^2 . x_2^2 \ldots . x_{n-1}^2}$.

Si f(x) est une fonction impaire, F(x) une fonction paire, on aura f(o) = o, et:

$-(F(o))^2 = (-1)^n . A . x_1^2 . x_2^2 \ldots x_{n-1}^2 . x_n^2$, et de là: $x_n^2 = \frac{-(-1)^n (F(o))^2}{A . x_1^2 . x_2^2 \ldots . x_{n-1}^2}$.

Si dans l'équation (2) on pose x = 1, on aura:

$(f(1))^2 = A(1-x_1^2)(1-x_2^2) \ldots (1-x_{n-1}^2)(1-x_n^2) = A y_1^2 . y_2^2 \ldots y_{n-1}^2 . y_n^2$, et de là:

$$y_n^2 = \frac{(f(1))^2}{A . y_1^2 . y_2^2 \ldots y_{n-1}^2}.$$

Enfin si l'on pose $x = \frac{1}{k}$, on aura:

$$(f(\tfrac{1}{k}))^2 = A . \frac{1-k^2x_1^2}{k^2} . \frac{1-k^2x_2^2}{k^2} \ldots . \frac{1-k^2x_{n-1}^2}{k^2} . \frac{1-k^2x_n^2}{k^2} = \frac{A}{k^{2n}} z_2^2 . z_1^2 \ldots z_{n-1}^2 . z_n^2, \text{ et de là:}$$

$$z_n^2 = \frac{k^{2n}(f(\frac{1}{k}))^2}{A . z_1^2 . z_2^2 \ldots z_{n-1}^2}.$$

Les signes de x_n, y_n, z_n seront déterminés par la dernière des équations (1), en remarquant que pour $x_1 = o$ on a: $y_1 = +1$ et $z_1 = +1$, pour $x_2 = o$ on a: $y_2 = +1$, $z_2 = +1, \ldots$ enfin que pour $x_n = o$, il faut avoir $y_n = +1$ et $z_n = +1$.

Considérons maintenant séparément les deux cas, quand f(x) est du degré n, F(x) du degré n − 3, et quand f(x) est du degré n − 1, F(x) du degré n−2. Désignons dans le dernier cas par $f_1(x)$, $F_1(x)$ et x'_n les valeurs correspondantes à f(x), F(x) et x_n du premier cas, les valeurs de x_1, $x_2, \ldots$ x_{n-1} étant les mêmes dans les deux cas. Supposons de plus que le coefficient de x^n dans f(x) et celui de x^{n-2} dans $F_1(x)$ soit + 1. Dans l'équation (2) la constante A deviendra alors dans le premier cas égale à: + 1, dans le second cas égale à: $-k^2$.

On aura donc les 2n − 2 équations linéaires:

$$(4) \quad \begin{cases} f(x_1) + F(x_1) . y_1 . z_1 = o, \; f_1(x_1) + F_1(x_1) y_1 . z_1 = o, \\ f(x_2) + F(x_2) . y_2 . z_2 = o, \; f_1(x_2) + F_1(x_2) y_2 . z_2 = o, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) . y_{n-1} . z_{n-1} = o, \; f_1(x_{n-1}) + F_1(x_{n-1}) . y_{n-1} . z_{n-1} = o, \end{cases}$$

par lesquelles les n − 1 coefficients de f(x) et F(x) et les n − 1 coefficients de $f_1(x)$ et $F_1(x)$ sont déterminés en fonctions de $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Les quantités x_n et x'_n seront alors déterminées en fonctions de ces coefficients par les équations:

$$f(x_n) + F(x_n) . y_n . z_n = o, \text{ et } f_1(x'_n) + F_1(x'_n) . y'_n . z'_n = o.$$

Si n est un nombre pair, f(x) et $F_1(x)$ seront des fonctions paires, F(x) et $f_1(x)$ des fonctions impaires, et on aura:

(5) $x_n^2 = \frac{(f(o))^2}{x_1^2.x_2^2....x_{n-1}^2}$, $x_n'^2 = \frac{(F_1(o))^2}{k^2.x_1^2.x_2^2...x_{n-1}^2}$, $k^2.x_n^2.x_n'^2 = \frac{(f(o))^2.(F_1(o))^2}{x_1^4.x_2^4....x_{n-1}^4}$

Si n est un nombre impair, f(x) et $F_1(x)$ seront des fonctions impaires, F(x) et $f_1(x)$ des fonctions paires, et on aura:

(6) $x_n^2 = \frac{(F(o))^2}{x_1^2.x_1^2....x_{n-1}^2}$, $x_n'^2 = \frac{(f_1(o))^2}{k^2.x_1^2.x_2^2...x_{n-1}^2}$, $k^2.x_n^2.x_n'^2 = \frac{(F(o))^2.(f_1(o))^2}{x_1^4.x_2^4....x_{n-1}^4}$.

Si maintenant entre les $2n-2$ équations (4) on élimine $y_1.z_1$, $y_2.z_2$, ... $y_{n-1}.z_{n-1}$, on aura les $n-1$ équations:

$$f(x_1).F_1(x_1) - F(x_1).f_1(x_1) = o,$$
$$f(x_2).F_1(x_2) - F(x_2).f_1(x_2) = o,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(x_{n-1}).F_1(x_{n-1}) - F(x_{n-1}).f_1(x_{n-1}) = o.$$

Or f(x) est une fonction entière paire ou impaire du degré n, et $F_1(x)$ une fonction entière paire ou impaire du degré $n-2$; donc $f(x).F_1(x)$ sera une fonction entière paire de x du degré $2n-2$. De même F(x) est une fonction entière paire ou impaire du degré $n-3$, et $f_1(x)$ une fonction entière paire ou impaire du degré $n-1$; donc $F(x).f_1(x)$ sera une fonction entière paire de x du degré $2n-4$. Donc les carrées x_1^2, x_2^2, ... x_{n-1}^2 seront les $n-1$ racines de l'équation:

$$f(x).F_1(x) - F(x).f_1(x) = o,$$

dont le membre gauche est une fonction entière de x^2 du degré $n-1$, et, puisque le coefficient de x^n dans f(x) et le coefficient de x^{n-2} dans $F_1(x)$ sont egaux à $+1$, on aura:

$$f(x).F_1(x) - F(x).f_1(x) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) .... (x^2 - x_{n-1}^2).$$

Si l'on pose ici $x = o$, on aura:

$$f(o).F_1(o) - F(o).f_1(o) = (-1)^{n-1}.x_1^2.x_2^2.... x_{n-1}^2.$$

Si n est un nombre pair, F(x) et $f_1(x)$ seront des fonctions entières impaires, f(x) et $F_1(x)$ des fonctions entières paires de x; donc on aura $F(o) = o$, $f_1(o) \neq o$, et: $f(o).F_1(o) = -x_1^2.x_2^2.... x_{n-1}^2$.

Si n est un nombre impair, f(x) et $F_1(x)$ seront des fonctions entières impaires, F(x) et $f_1(x)$ des fonctions entières paires de x; donc on aura $f(o) = o$, $F_1(o) = o$, et:

$$F(o).f_1(o) = x_1^2.x_2^2...x_{n-1}^2.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (5) et (6), on trouvera donc toujours:

(7) $k^2.x_n^2.x'^2_n = 1$, ou: $x'_n = \pm \frac{1}{kx_n}$. et de là: $y'_n = \pm \frac{iz_n}{kx_n}$, $z'_n = \pm \frac{iy_n}{kx_n}$.

Il est donc seulement nécessaire de chercher la valeur de x_n dans le premier cas pour l'avoir en même temps dans le second cas.

Déterminons maintenant le signe de x_n dans le premier cas. On a alors $A = 1$, et si l'on pose dans l'équation (2): $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = o$, elle ce réduira à celle-ci:

$$(f(x))^2 - (F(x))^2 . (1 - x^2) . (1 - k^2x^2) = x^{2n-2}(x^2 - x_n^2).$$

Si l'on développe le premier membre de cette équation suivant les puissances de x, et si l'on compare alors les coefficients des deux côtés, on voit que tous les coefficients indéterminés de f(x) et F(x) doivent disparaître avec $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$. Le premier membre de l'équation précédente se réduira alors à x^{2n}, et l'équation deviendra: $x^{2n} = x^{2n-2}(x^2 - x_n^2)$, de laquelle on tire $x_n = o$.

Maintenant pour des valeurs évanouissantes de $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ et x_n les radicaux: $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, z_n$ se réduisent à $+ 1$; donc il sort des équations (1) que les quantités $x_1, x_2, \ldots x_n$ seront des racines de l'équation du degré n en x:

$$f(x) + F(x) = o,$$

et on aura pour des valeurs évanouissantes de $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$:

$$f(x) + F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_n),$$

de laquelle on tire:

si n est un nombre pair: $f(o) = x_1 . x_2 \ldots . x_{n-1} . x_n$,

et si n est un nombre impair: $F(o) = - x_1 . x_2 \ldots . x_{n-1} . x_n$.

Donc des équations (5) et (6) on tire pour des valeurs paires de n:

$$(8) \qquad x_n = \frac{f(o)}{x_1 . x_2 \ldots . x_{n-1}},$$

et pour des valeurs impaires de n:

$$(9) \qquad x_n = - \frac{F(o)}{x_1 . x_2 \ldots . x_{n-1}}.$$

Lorsque les quantités: $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ tendent vers zéro, f(x) aura pour limite x^n, donc f(1) aura pour limite $+ 1$, et $f(\frac{1}{k})$ aura pour limite $\frac{1}{k^n}$, et puisque alors x_n tend également vers zéro, les radicaux $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}, z_n$ auront tous pour limite $+ 1$. Donc des équations précédentes:

$$y_n^2 = \frac{(f(1))^2}{y_1^2 . y_2^2 \ldots y_{n-1}^2}, \text{ et } z_n^2 = \frac{(f(\frac{1}{k}))^2}{z_1^2 . z_2^2 \ldots . z_{n-1}^2},$$

on tire:

$$(10) \qquad y_n = \frac{f(1)}{y_1 . y_2 \ldots . y_{n-1}}, \; z_n = \frac{f(\frac{1}{k})}{z_1 . z_2 \ldots . z_{n-1}}.$$

Puisque x_n diparaît avec $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, la constante de l'intégration disparaîtra dans l'équation (3), et on aura par conséquent:

$$(11) \qquad \int_0^{x_1} \frac{dx}{y.z} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{y.z} + \ldots + \int_0^{x_{n-1}} \frac{dx}{y.z} = -\int_0^{x_n} \frac{dx}{y.z} = \int_0^{-x_n} \frac{dx}{y.z}.$$

De l'équation (7) on trouve que pour $x_n = 0$ on aura $x'_n = \pm \frac{1}{kx_n} = \pm \infty$. La constante C de l'intégration (3) deviendra alors:

$C = \int_0^{\pm\infty} \frac{dx}{yz} = \pm \int_0^{\infty} \frac{dx}{yz}$, et on aura par conséquent:

$$(12) \int_0^{x_1} \frac{dx}{y.z} + \int_0^{x_2} \frac{dx}{y.z} + \ldots + \int_0^{x_{n-1}} \frac{dx}{y.z} \mp \int_0^{\infty} \frac{dx}{y.z} = -\int_0^{x'_n} \frac{dx}{y.z} = \int_0^{-x'_n} \frac{dx}{y.z}.$$

Si l'on pose: $\int_0^{x_1} \frac{dx}{y.z} = u_1$, $\int_0^{x_2} \frac{dx}{y.z} = u_2$, $\ldots$ $\int_0^{x_{n-1}} \frac{dx}{y.z} = u_{n-1}$,

on aura: $x_1 = \sin am\, u_1$, $y_1 = \cos am\, u_1$, $z_1 = \Delta am\, u_1$, $x_2 = \sin am\, u_2$, $y_2 = \cos am\, u_2$, $z_2 = \Delta am\, u_2$, ... $x_{n-1} = \sin am\, u_{n-1}$, $y_{n-1} = \cos am\, u_{n-1}$, $z_{n-1} = \Delta am\, u_{n-1}$, et les équations (11) et (12) donneront:

$$\begin{aligned}
-x_n &= \sin am\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}),\\
y_n &= \cos am\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}),\\
z_n &= \Delta\ am\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}),\\
-x'_n &= \sin am\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} \mp \int_0^{\infty} \frac{dx}{yz}),\\
y'_n &= \cos am\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} \mp \int_0^{\infty} \frac{dx}{yz}),\\
z'_n &= \Delta\ am\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} \mp \int_0^{\infty} \frac{dx}{yz}).
\end{aligned}$$

Les équations (8) ou (9) et (10) donneront donc les valeurs des fonctions elliptiques de ces arguments et les équations (7) font de plus voir que:

$$\sin am\,(u \mp \int_0^{\infty} \frac{dx}{y.z}) = \mp \frac{1}{k.\sin am\, u};\quad \cos am\,(u \mp \int_0^{\infty} \frac{dx}{y.z}) = \pm \frac{i\,\Delta\ am\ u}{k.\sin am\, u},$$

$$\Delta\ am\ (u \mp \int_0^{\infty} \frac{dx}{y.z}) = \pm \frac{i \cos am\, u}{k.\sin am\, u}.$$

10. Des formules du 5 et 6 on déduit facilement une grande quantité d'autres formules. Nous en citerons en particulier les formules suivantes, où pour abréger $u + v = \alpha$, $u - v = \beta$:

(1) $\xi + \xi' = \frac{2x_1y_2z_2}{1 - k^2x_1^2x_2^2}$, ou: $\sin am\, \alpha + \sin am\, \beta = \frac{2 \sin am\, u . \cos am\, v . \Delta am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u . \sin^2 am\, v}$.

(2) $\eta + \eta' = \frac{2y_1y_2}{1 - k^2x_1^2x_2^2}$, ou: $\cos am\, \alpha + \cos am\, \beta = \frac{2 \cos am\, u\ .\ \cos am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u . \sin^2 am\, v}$.

(3) $\zeta + \zeta' = \frac{2z_1z_2}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou: $\Delta \operatorname{am} \alpha + \Delta \operatorname{am} \beta = \frac{2\,\Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v}{1-k^2\sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}$.

(4) $\xi - \xi' = \frac{2x_2y_1z_1}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou: $\sin \operatorname{am} \alpha - \sin \operatorname{am} \beta = \frac{2\sin \operatorname{am} v \,.\, \cos \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{1-k^2\sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}$.

(5) $\eta - \eta' = -\frac{2x_1x_2z_1z_2}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou: $\cos \operatorname{am} \alpha - \cos \operatorname{am} \beta = -\frac{2\sin \operatorname{am} u \,.\, \sin \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}$.

(6) $\zeta - \zeta' = -\frac{2k^2x_1x_2y_1y_2}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou: $\Delta \operatorname{am} \alpha - \Delta \operatorname{am} \beta = -\frac{2k^2 \sin \operatorname{am} u \,.\, \sin \operatorname{am} v \,.\, \cos \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}$.

(7) $\xi\xi' = \frac{x_1^2 - x_2^2}{1-k^2x_1^2x_2^2} = -\frac{y_1^2 - y_2^2}{1-k^2x_1^2x_2^2} = -\frac{1}{k^2} \cdot \frac{z_1^2 - z_2^2}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou:

$$\sin \operatorname{am} \alpha \,.\, \sin \beta = \frac{\sin^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v} = -\frac{\cos^2 \operatorname{am} u - \cos^2 \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v} =$$

$$= -\frac{1}{k^2} \cdot \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u - \Delta^2 \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

(8) $\eta\eta' = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{z_1^2z_2^2 - k'^2}{1-k^2x_1^2x_2^2} = \frac{y_1^2 - x_2^2z_1^2}{1-k^2x_1^2x_2^2} = \frac{y_2^2 - x_1^2z_2^2}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou:

$$\cos \operatorname{am} \alpha \cos \operatorname{am} \beta = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u \,.\, \Delta^2 \operatorname{am} v - k'^2}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v} = \frac{\cos^2 \operatorname{am} u - \sin^2 \operatorname{am} v \,.\, \Delta^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v} =$$

$$= \frac{\cos^2 \operatorname{am} v - \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \Delta^2 \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

(9) $\zeta\zeta' = \frac{k'^2 + k^2y_1^2y_2^2}{1-k^2x_1^2x_2^2} = \frac{z_1^2 - k^2x_2^2y_1^2}{1-k^2x_1^2x_2^2} = \frac{z_2^2 - k^2x_1^2y_2^2}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou:

$$\Delta \operatorname{am} \alpha \,.\, \Delta \operatorname{am} \beta = \frac{k'^2 + k^2 \cos^2 \operatorname{am} u \,.\, \cos^2 \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v} = \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v \,.\, \cos^2 \operatorname{am} u}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v} =$$

$$= \frac{\Delta^2 \operatorname{am} v - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \cos^2 \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

(10) $\eta'\zeta + \eta\zeta' = \frac{2y_1y_2z_1z_2}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou:

$$\cos \operatorname{am} \beta \,.\, \Delta \operatorname{am} \alpha + \cos \operatorname{am} \alpha \,.\, \Delta \operatorname{am} \beta = \frac{2 \cos \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

(11) $\eta'\zeta - \eta\zeta' = \frac{2k'^2x_1x_2}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou:

$$\cos \operatorname{am} \beta \,.\, \Delta \operatorname{am} \alpha - \cos \operatorname{am} \alpha \,.\, \Delta \operatorname{am} \beta = \frac{2k'^2 \,.\, \sin \operatorname{am} u \,.\, \sin \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

(12) $\xi\zeta' + \xi'\zeta = \frac{2x_1y_2z_1}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou:

$$\sin \operatorname{am} \alpha \,.\, \Delta \operatorname{am} \beta + \sin \operatorname{am} \beta \,.\, \Delta \operatorname{am} \alpha = \frac{2 \sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} v \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

(13) $\xi\zeta' - \xi'\zeta = \frac{2x_2y_1z_2}{1-k^2x_1^2x_2^2}$, ou:

$$\sin \operatorname{am} \alpha \,.\, \Delta \operatorname{am} \beta - \sin \operatorname{am} \beta \,.\, \Delta \operatorname{am} \alpha = \frac{2 \sin \operatorname{am} v \,.\, \cos \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} v}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \,.\, \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

$$(14)\quad \xi\eta' + \xi'\eta = \frac{2x_1y_1z_2}{1-k^2x_1^2x_2^2},\ \text{ou:}$$

$$\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\cos\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\cos\mathrm{am}\,\alpha = \frac{2\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

$$(15)\quad \xi\eta' - \xi'\eta = \frac{2x_2y_2z_1}{1-k^2x_1^2x_2^2},\ \text{ou:}$$

$$\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\cos\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\cos\mathrm{am}\,\alpha = \frac{2\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

De ces équations on tire de plus en les divisant deux à deux:

$$(16)\quad \frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi'} = \frac{\xi+\xi'}{\xi\xi'} = \frac{2x_1y_2z_2}{x_1^2-x_2^2} = -\frac{2x_1y_2z_2}{y_1^2-y_2^2} = -\frac{2k^2x_1y_2z_2}{z_1^2-z_2^2},\ \text{ou:}$$

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,\alpha}+\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,\beta} = \frac{2\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v} = -\frac{2\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\cos^2\mathrm{am}\,v} =$$

$$= -\frac{2k^2\,.\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-\Delta^2\mathrm{am}\,v}.$$

$$(17)\quad \frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta'} = \frac{\eta+\eta'}{\eta\eta'} = \frac{2k^2y_1y_2}{z_1^2z_2^2-k'^2} = \frac{2y_1y_2}{y_1^2-x_2^2z_1^2} = \frac{2y_1y_2}{y_2^2-x_1^2z_2^2},\ \text{ou:}$$

$$\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,\alpha}+\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,\beta} = \frac{2k^2\,.\cos\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,v-k'^2} = \frac{2\cos\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v\,.\Delta^2\mathrm{am}\,u} =$$

$$= \frac{2\cos\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{am}\,v-\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,v}.$$

$$(18)\quad \frac{1}{\zeta}+\frac{1}{\zeta'} = \frac{\zeta+\zeta'}{\zeta\zeta'} = \frac{2z_1z_2}{k'^2+k^2y_1^2y_2^2} = \frac{2z_1z_2}{z_1^2-k^2x_2^2y_1^2} = \frac{2z_1z_2}{z_2^2-k^2x_1^2y_2^2},\ \text{ou:}$$

$$\frac{1}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha}+\frac{1}{\Delta\mathrm{am}\,\beta} = \frac{2\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{k'^2+k^2\cos^2\mathrm{am}\,u\,.\cos^2\mathrm{am}\,v} = \frac{2\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v\,.\cos^2\mathrm{am}\,u} =$$

$$= \frac{2\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,v-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\cos^2\mathrm{am}\,v}.$$

$$(19)\quad \frac{1}{\xi}-\frac{1}{\xi'} = -\frac{\xi-\xi'}{\xi\xi'} = -\frac{2x_2y_1z_1}{x_1^2-x_2^2} = \frac{2x_2y_1z_1}{y_1^2-y_2^2} = \frac{2k^2x_2y_1z_1}{z_1^2-z_2^2},\ \text{ou:}$$

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,\alpha}-\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,\beta} = -\frac{2\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v} = \frac{2\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\cos^2\mathrm{am}\,v} =$$

$$= \frac{2k^2\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-\Delta^2\mathrm{am}\,v}.$$

$$(20)\quad \frac{1}{\eta}-\frac{1}{\eta'} = -\frac{\eta-\eta'}{\eta\eta'} = \frac{2k^2x_1x_2z_1z_2}{z_1^2z_2^2-k'^2} = \frac{2x_1x_2z_1z_2}{y_1^2-x_2^2z_1^2} = \frac{2x_1x_2z_1z_2}{y_2^2-x_1^2z_2^2},\ \text{ou:}$$

$$\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,\alpha}-\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,\beta} = \frac{2k^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,v-k'^2} =$$

$$= \frac{2\sin\mathrm{am}\,u\,.\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,u} = \frac{2\sin\mathrm{am}\,u\,.\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{am}\,v-\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,v}.$$

$$(21)\quad \frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta'} = -\frac{\zeta-\zeta'}{\zeta\zeta'} = \frac{2k^2x_1x_2y_1y_2}{k'^2+k^2y_1^2y_2^2} = \frac{2k^2x_1x_2y_1y_2}{z_1^2-k^2x_2^2y_1^2} = \frac{2k^2x_1x_2y_1y_2}{z_2^2-k^2x_1^2y_2^2},\ \text{ou:}$$

$$\frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha}-\frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}=\frac{2k^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,v}{k'^2+k^2\cos^2\mathrm{am}\,u\,.\cos^2\mathrm{am}\,v}=$$

$$=\frac{2k^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v\,.\cos^2\mathrm{am}\,u}=\frac{2k^2\sin\mathrm{am}\,u.\sin\mathrm{am}\,v.\cos\mathrm{am}\,u.\cos\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,v-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\cos^2\mathrm{am}\,v}.$$

(22) $$\frac{\eta}{\zeta}+\frac{\eta'}{\zeta'}=\frac{\eta\zeta'+\eta'\zeta}{\zeta\zeta'}=\frac{2y_1y_2z_1z_2}{k'^2+k^2y_1^2y_2^2}=\frac{2y_1y_2z_1z_2}{z_1^2-k^2x_2^2y_1^2}=\frac{2y_1y_2z_1z_2}{z_2^2-k^2x_1^2y_2^2},$$ ou:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha}{\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha}+\frac{\cos\mathrm{am}\,\beta}{\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}=\frac{2\cos\mathrm{am}\,u.\cos\mathrm{am}\,v\,.\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,v}{k'^2+k^2\cos^2\mathrm{am}\,u\,.\cos^2\mathrm{am}\,v}=$$

$$=\frac{2\cos\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v\,.\cos^2\mathrm{am}\,u}=\frac{2\cos\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,v-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\cos^2\mathrm{am}\,v}.$$

(23) $$\frac{\eta}{\zeta}-\frac{\eta'}{\zeta'}=\frac{\eta\zeta'-\eta'\zeta}{\zeta\zeta'}=-\frac{2k'^2x_1x_2}{k'^2+k^2y_1^2y_2^2}=-\frac{2k'^2x_1x_2}{z_1^2-k^2x_2^2y_1^2}=-\frac{2k'^2x_1x_2}{z_2^2-k^2x_1^2y_2^2},$$ ou:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha}-\frac{\cos\mathrm{am}\,\beta}{\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}=-\frac{2k'^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,v}{k'^2+k^2\cos^2\mathrm{am}\,u.\cos^2\mathrm{am}\,v}=-\frac{2k'^2\sin\mathrm{am}\,u.\sin\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{amu}-k^2\sin^2\mathrm{amv}.\cos^2\mathrm{amu}}=$$

$$=-\frac{2k'^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\sin\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,v-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\cos^2\mathrm{am}\,v}.$$

(24) $$\frac{\zeta}{\eta}+\frac{\zeta'}{\eta'}=\frac{\eta'\zeta+\eta\zeta'}{\eta\eta'}=\frac{2k^2y_1y_2z_1z_2}{z_1^2z_2^2-k'^2}=\frac{2y_1y_2z_1z_2}{y_1^2-x_2^2z_1^2}=\frac{2y_1y_2z_1z_2}{y_2^2-x_1^2z_2^2},$$ ou:

$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha}{\cos\mathrm{am}\,a}+\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}{\cos\mathrm{am}\beta}=\frac{2k^2\cos\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,v-k'^2}=$$

$$=\frac{2\cos\mathrm{am}\,u.\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u.\,\Delta\,\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,u}=\frac{2\cos\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{am}\,v-\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,v}.$$

(25) $$\frac{\zeta}{\eta}-\frac{\zeta'}{\eta'}=\frac{\eta'\zeta-\eta\zeta'}{\eta\eta'}=\frac{2k^2k'^2x_1x_2}{z_1^2z_2^2-k'^2}=\frac{2k'^2x_1x_2}{y_1^2-x_2^2z_1^2}=\frac{2k'^2x_1x_2}{y_2^2-x_1^2z_2^2},$$ ou:

$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\alpha}{\cos\mathrm{am}\,\alpha}-\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}{\cos\mathrm{am}\,\beta}=\frac{2k^2k'^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\sin\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta^2\mathrm{am}\,v-k'^2}=\frac{2k'^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{amu}-\sin^2\mathrm{amv}.\Delta^2\mathrm{amu}}=$$

$$=\frac{2k'^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{am}\,v-\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\Delta^2\mathrm{am}\,v}.$$

(26) $$\frac{\zeta}{\xi}+\frac{\zeta'}{\xi'}=\frac{\xi'\zeta+\xi\zeta'}{\xi\xi'}=\frac{2x_1y_2z_1}{x_1^2-x_2^2}=-\frac{2x_1y_2z_1}{y_1^2-y_2^2}=-\frac{2k^2x_1y_2z_1}{z_1^2-z_2^2},$$ ou:

$$\frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha}{\sin\,\mathrm{am}\,\alpha}+\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\beta}=\frac{2\sin\mathrm{am}\,u.\cos\mathrm{am}\,v.\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v}=-\frac{2\sin\mathrm{am}\,u.\cos\mathrm{am}\,v.\Delta\mathrm{am}\,u}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\cos^2\mathrm{am}\,v}=$$

$$=-\frac{2k^2\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-\Delta^2\mathrm{am}\,v}.$$

(27) $$\frac{\zeta}{\xi}-\frac{\zeta'}{\xi'}=\frac{\xi'\zeta-\xi\zeta'}{\xi\xi'}=-\frac{2x_2y_1z_2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{2x_2y_1z_2}{y_1^2-y_2^2}=\frac{2k^2x_2y_1z_2}{z_1^2-z_2^2},$$ ou:

$$\frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha}{\sin\mathrm{am}\,\alpha}-\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\beta}=-\frac{2\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v}=\frac{2\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\cos^2\mathrm{am}\,u-\cos^2\mathrm{am}\,v}=$$

$$=\frac{2k^2\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\Delta^2\mathrm{am}\,u-\Delta^2\mathrm{am}\,v}.$$

(28) $\frac{\xi}{\zeta}+\frac{\xi'}{\zeta'}=\frac{\xi\zeta'+\xi'\zeta}{\zeta\zeta'}=\frac{2x_1y_2z_1}{k'^2+k^2y_1^2y_2^2}=\frac{2x_1y_2z_1}{z_1^2-k^2x_2^2y_1^2}=\frac{2x_1y_2z_1}{z_2^2-k^2x_1^2y_2^2}$, ou:

$$\frac{\sin am\alpha}{\Delta am\alpha}+\frac{\sin am\beta}{\Delta am\beta}=\frac{2\sin am u\,.\cos am v\,.\Delta am u}{k'^2+k^2\cos^2 am u\,.\cos^2 am v}=\frac{2\sin am u\,.\cos am v.\Delta am u}{\Delta^2 am u-k^2\sin^2 am v.\cos^2 am u}=$$

$$=\frac{2\sin am u\,.\cos am v\,.\Delta am u}{\Delta^2 am v-k^2\sin^2 am u\,.\cos^2 am v}.$$

(29) $\frac{\xi}{\zeta}-\frac{\xi'}{\zeta'}=\frac{\xi\zeta'-\xi'\zeta}{\zeta\zeta'}=\frac{2x_2y_1z_2}{k'^2+k^2y_1^2y_2^2}=\frac{2x_2y_1z_2}{z_1^2-k^2x_2^2y_1^2}=\frac{2x_2y_1z_2}{z_2^2-k^2x_1^2y_2^2}$, ou:

$$\frac{\sin am\alpha}{\Delta am\alpha}-\frac{\sin am\beta}{\Delta am\beta}=\frac{2\sin am v\,.\cos am u\,.\Delta am v}{k'^2+k^2\cos^2 am u\,.\cos^2 am v}=\frac{2\sin am v\,.\cos am u.\Delta am v}{\Delta^2 amu-k^2\sin^2 amv.\cos^2 amu}=$$

$$=\frac{2\sin am v\,.\cos am u\,.\Delta am v}{\Delta^2 am v-k^2\sin^2 amu\,.\cos^2 am v}.$$

(30) $\frac{\xi}{\eta}+\frac{\xi'}{\eta'}=\frac{\xi\eta'+\xi'\eta}{\eta\eta'}=\frac{2k^2x_1y_1z_2}{z_1^2z_2^2-k'^2}=\frac{2x_1y_1z_2}{y_1^2-x_2^2z_1^2}=\frac{2x_1y_1z_2}{y_2^2-x_1^2z_2^2}$, ou:

$$\frac{\sin am\alpha}{\cos am\alpha}+\frac{\sin am\beta}{\cos am\beta}=\frac{2k^2\sin am u\,.\cos am u\,.\Delta am v}{\Delta^2 am u\,.\Delta^2 am v-k'^2}=\frac{2\sin am u\,.\cos am u\,.\Delta am v}{\cos^2 am u-\sin^2 am v\,.\Delta^2 am u}=$$

$$=\frac{2\sin am u\,.\cos am u\,.\Delta am v}{\cos^2 am v-\sin^2 am u\,.\Delta^2 am v}.$$

(31) $\frac{\xi}{\eta}-\frac{\xi'}{\eta'}=\frac{\xi\eta'-\xi'\eta}{\eta\eta'}=\frac{2k^2x_2y_2z_1}{z_1^2z_2^2-k'^2}=\frac{2x_2y_2z_1}{y_1^2-x_2^2z_1^2}=\frac{2x_2y_2z_1}{y_2^2-x_1^2z_2^2}$, ou:

$$\frac{\sin am\alpha}{\cos am\alpha}-\frac{\sin am\beta}{\cos am\beta}=\frac{2k^2\sin am v\,.\cos am v\,.\Delta am u}{\Delta^2 amu\,.\Delta^2 amv-k'^2}=\frac{2\sin am v\,.\cos am v\,.\Delta am u}{\cos^2 am u-\sin^2 am v\,.\Delta^2 amu}=$$

$$=\frac{2\sin am v\,.\cos am v\,.\Delta am u}{\cos^2 am v-\sin^2 am u\,.\Delta^2 am v}.$$

(32) $\frac{\eta}{\xi}+\frac{\eta'}{\xi'}=\frac{\xi'\eta+\xi\eta'}{\xi\xi'}=\frac{2x_1y_1z_2}{x_1^2-x_2^2}=-\frac{2x_1y_1z_2}{y_1^2-y_2^2}=-\frac{2k^2x_1y_1z_2}{z_1^2-z_2^2}$, ou:

$$\frac{\cos am\alpha}{\sin am\alpha}+\frac{\cos am\beta}{\sin am\beta}=\frac{2\sin am u\,.\cos am u\,.\Delta am v}{\sin^2 am u-\sin^2 am v}=-\frac{2\sin am u\,.\cos am u\,.\Delta am v}{\cos^2 am u-\cos^2 am v}=$$

$$=-\frac{2k^2\sin am u\,.\cos am u\,.\Delta am v}{\Delta^2 amu-\Delta^2 amv}.$$

(33) $\frac{\eta}{\xi}-\frac{\eta'}{\xi'}=\frac{\xi'\eta-\xi\eta'}{\xi\xi'}=-\frac{2x_2y_2z_1}{x_1^2-x_2^2}=\frac{2x_2y_2z_1}{y_1^2-y_2^2}=\frac{2k^2x_2y_2z_1}{z_1^2-z_2^2}$, ou:

$$\frac{\cos am\alpha}{\sin am\alpha}-\frac{\cos am\beta}{\sin am\beta}=-\frac{2\sin am v\,.\cos am v\,.\Delta am u}{\sin^2 amu-\sin^2 amv}=\frac{2\sin am v\,.\cos am v\,.\Delta am u}{\cos^2 amu-\cos^2 am v}=$$

$$=\frac{2k^2\sin am v\,.\cos am v\,.\Delta am u}{\Delta^2 amu-\Delta^2 amv}.$$

(34) $x_1x_2=-\frac{1}{k^2}\cdot\frac{\zeta-\zeta'}{\eta+\eta'}=-\frac{\eta-\eta'}{\zeta+\zeta'}$, ou:

$$\sin am u\,.\sin am v=-\frac{1}{k^2}\cdot\frac{\Delta am\alpha-\Delta am\beta}{\cos am\alpha+\cos am\beta}=-\frac{\cos am\alpha-\cos am\beta}{\Delta am\alpha+\Delta am\beta}.$$

(35) $y_1 y_2 = \frac{\eta'\zeta + \eta\zeta'}{\zeta + \zeta'} = -\frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{\zeta - \zeta'}{\eta'\zeta - \eta\zeta'}$, ou:

$$\cos\mathrm{am}\, u \,.\, \cos\mathrm{am}\, v = \frac{\cos\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha + \cos\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta}{\Delta\mathrm{am}\alpha + \Delta\mathrm{am}\beta} = -\frac{k'^2}{k^2}\,\frac{\Delta\mathrm{am}\alpha - \Delta\mathrm{am}\beta}{\cos\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha - \cos\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta}.$$

(36) $z_1 z_2 = \frac{\eta'\zeta + \eta\zeta'}{\eta + \eta'} = -k'^2\frac{\eta - \eta'}{\eta'\zeta - \eta\zeta'}$, ou:

$$\Delta\mathrm{am}\, u \,.\, \Delta\,\mathrm{am}\, v = \frac{\cos\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha + \cos\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta}{\cos\mathrm{am}\alpha + \cos\mathrm{am}\beta} = -k'^2\,\frac{\cos\mathrm{am}\alpha - \cos\mathrm{am}\beta}{\cos\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha - \cos\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta}.$$

(37) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{\xi\zeta' + \xi'\zeta}{\xi\eta' - \xi'\eta} = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\xi\zeta' - \xi'\zeta}$, ou:

$$\frac{\sin\mathrm{am}\, u}{\sin\mathrm{am}\, v} = \frac{\sin\mathrm{am}\alpha\ \Delta\mathrm{am}\beta + \sin\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha}{\sin\mathrm{am}\alpha.\cos\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\beta.\cos\mathrm{am}\alpha} = \frac{\sin\mathrm{am}\alpha.\cos\mathrm{am}\beta + \sin\mathrm{am}\beta.\cos\mathrm{am}\alpha}{\sin\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha}.$$

(38) $\frac{y_1}{y_2} = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\xi + \xi'} = \frac{\xi - \xi'}{\xi\eta' - \xi'\eta}$, ou:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\, u}{\cos\mathrm{am}\, v} = \frac{\sin\mathrm{am}\alpha.\cos\mathrm{am}\beta + \sin\mathrm{am}\beta.\cos\mathrm{am}\alpha}{\sin\mathrm{am}\alpha + \sin\mathrm{am}\beta} = \frac{\sin\mathrm{am}\alpha - \sin\mathrm{am}\beta}{\sin\mathrm{am}\alpha.\cos\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\beta.\cos\mathrm{am}\alpha}.$$

(39) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\xi\zeta' + \xi'\zeta}{\xi + \xi'} = \frac{\xi - \xi'}{\xi\zeta' - \xi'\zeta}$, ou:

$$\frac{\Delta\mathrm{am}\, u}{\Delta\mathrm{am}\, v} = \frac{\sin\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta + \sin\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha}{\sin\mathrm{am}\alpha + \sin\mathrm{am}\beta} = \frac{\sin\mathrm{am}\alpha - \sin\mathrm{am}\beta}{\sin\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha}.$$

(40) $\frac{x_1}{y_1 z_1} = \frac{\xi + \xi'}{\eta'\zeta + \eta\zeta'} = \frac{1}{k'^2}\cdot\frac{\eta'\zeta - \eta\zeta'}{\xi - \xi'}$, ou:

$$\frac{\sin\mathrm{am}\, u}{\cos\mathrm{am}\, u \,.\, \Delta\mathrm{am}\, u} = \frac{\sin\mathrm{am}\alpha + \sin\mathrm{am}\beta}{\cos\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha + \cos\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta} = \frac{1}{k'^2}\,\frac{\cos\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha - \cos\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta}{\sin\mathrm{am}\alpha - \sin\mathrm{am}\beta}.$$

(41) $\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{\eta + \eta'}{\xi\zeta' + \xi'\zeta} = -\frac{\xi\zeta' - \xi'\zeta}{\eta - \eta'}$, ou:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\, u}{\sin\mathrm{am}\, u \,.\, \Delta\mathrm{am}\, u} = \frac{\cos\mathrm{am}\alpha + \cos\mathrm{am}\beta}{\sin\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta + \sin\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha} = -\frac{\sin\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha}{\cos\mathrm{am}\alpha - \cos\mathrm{am}\beta}.$$

(42) $\frac{z_1}{x_1 y_1} = \frac{\zeta + \zeta'}{\xi\eta' + \xi'\eta} = -k^2.\frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\zeta - \zeta'}$, ou:

$$\frac{\Delta\mathrm{am}\, u}{\sin\mathrm{am} u.\cos\mathrm{am} u} = \frac{\Delta\mathrm{am}\alpha + \Delta\mathrm{am}\beta}{\sin\mathrm{am}\alpha.\cos\mathrm{am}\beta + \sin\mathrm{am}\beta.\cos\mathrm{am}\alpha} =$$

$$= -k^2.\frac{\sin\mathrm{am}\alpha\cos\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\beta.\cos\mathrm{am}\alpha}{\Delta\mathrm{am}\alpha - \Delta\mathrm{am}\beta}.$$

(43) $\frac{x_2}{y_2 z_2} = \frac{\xi - \xi'}{\eta'\zeta + \eta\zeta'} = \frac{1}{k'^2}\cdot\frac{\eta'\zeta - \eta\zeta'}{\xi + \xi'}$, ou:

$$\frac{\sin\mathrm{am}\, v}{\cos\mathrm{am}\, v.\Delta\mathrm{am}\, v} = \frac{\sin\mathrm{am}\alpha - \sin\mathrm{am}\beta}{\cos\mathrm{am}\beta\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\alpha + \cos\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta} =$$

$$= \frac{1}{k^2}\cdot\frac{\cos\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha - \cos\mathrm{am}\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta}{\sin\mathrm{am}\alpha + \sin\mathrm{am}\beta}.$$

(44) $$\frac{y_2}{x_2 z_2} = \frac{\eta + \eta'}{\xi\zeta' - \xi'\zeta} = -\frac{\xi\zeta' + \xi'\zeta}{\eta - \eta'}, \text{ ou:}$$

$$\frac{\cos\mathrm{am}\, v}{\sin\mathrm{am}\, v \,.\, \Delta\mathrm{am}\, v} = \frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha + \cos\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha} = -\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha}{\cos\mathrm{am}\,\alpha - \cos\mathrm{am}\,\beta}$$

(45) $$\frac{z_2}{x_2 y_2} = \frac{\zeta + \zeta'}{\xi\eta' - \xi'\eta} = -k^2 \cdot \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\zeta - \zeta'}, \text{ ou:}$$

$$\frac{\Delta\mathrm{am}\, v}{\sin\mathrm{am}\, v \,.\, \cos\mathrm{am}\, v} = \frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha + \Delta\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\cos\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta.\cos\mathrm{am}\alpha} =$$

$$= -k^2 \cdot \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \cos\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta \,.\, \cos\mathrm{am}\,\alpha}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha - \Delta\mathrm{am}\,\beta}.$$

(46) $$\frac{x_1}{y_1 z_2} = \frac{\xi\zeta' + \xi'\zeta}{\eta'\zeta + \eta\zeta'} = \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\eta'\zeta - \eta\zeta'}{\xi\zeta' - \xi'\zeta}, \text{ ou:}$$

$$\frac{\sin\mathrm{am}\, u}{\cos\mathrm{am}\, u \,.\, \Delta\mathrm{am}\, v} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha}{\cos\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha + \cos\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta} =$$

$$= \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\cos\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha - \cos\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha}.$$

(47) $$\frac{x_1}{y_2 z_1} = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\eta'\zeta + \eta\zeta'} = \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\eta'\zeta - \eta\zeta'}{\xi\eta' - \xi'\eta}, \text{ ou:}$$

$$\frac{\sin\mathrm{am}\, u}{\cos\mathrm{am}\, v \,.\, \Delta\mathrm{am}\, u} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \cos\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta \,.\, \cos\mathrm{am}\,\alpha}{\cos\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha + \cos\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta} =$$

$$= \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\cos\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha - \cos\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \cos\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta \,.\, \cos\mathrm{am}\alpha}.$$

(48) $$\frac{x_2}{y_1 z_2} = \frac{\xi\eta' - \xi'\eta}{\eta'\zeta + \eta\zeta'} = \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\eta'\zeta - \eta\zeta'}{\xi\eta' + \xi'\eta}, \text{ ou:}$$

$$\frac{\sin\mathrm{am}\, v}{\cos\mathrm{am}\, u \,.\, \Delta\mathrm{am}\, v} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \cos\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta \,.\, \cos\mathrm{am}\,\alpha}{\cos\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha + \cos\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta} =$$

$$= \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\cos\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha - \cos\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \cos\mathrm{am}\beta + \sin\mathrm{am}\beta \,.\, \cos\mathrm{am}\alpha}.$$

(49) $$\frac{x_2}{y_2 z_1} = \frac{\xi\zeta' - \xi'\zeta}{\eta'\zeta + \eta\zeta'} = \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\eta'\zeta - \eta\zeta'}{\xi\zeta' + \xi'\zeta}, \text{ ou:}$$

$$\frac{\sin\mathrm{am}\, v}{\cos\mathrm{am}\, v \,.\, \Delta\mathrm{am}\, u} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha}{\cos\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha + \cos\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta} =$$

$$= \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\cos\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha - \cos\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta \,.\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha}.$$

(50) $$\frac{y_1}{x_1 z_2} = \frac{\eta + \eta'}{\xi + \xi'} = -\frac{\xi - \xi'}{\eta - \eta'}, \text{ ou:}$$

$$\frac{\cos\mathrm{am}\, u}{\sin\mathrm{am}\, u \,.\, \Delta\mathrm{am}\, v} = \frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha + \cos\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha + \sin\mathrm{am}\,\beta} = -\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha - \sin\mathrm{am}\,\beta}{\cos\mathrm{am}\,\alpha - \cos\mathrm{am}\,\beta}.$$

(51) $$\frac{y_1}{x_2 z_1} = \frac{\eta + \eta'}{\xi\eta' - \xi'\eta} = -\frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\eta - \eta'}, \text{ ou:}$$

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha+\cos\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\cos\mathrm{am}\,\beta-\sin\mathrm{am}\,\beta.\cos\mathrm{am}\,\alpha} =$$

$$= -\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\cos\mathrm{am}\,\beta+\sin\mathrm{am}\,\beta.\cos\mathrm{am}\,\alpha}{\cos\mathrm{am}\,\alpha-\cos\mathrm{am}\,\beta}.$$

(52) $\frac{y_2}{x_1 z_2} = \frac{\eta+\eta'}{\xi\eta'+\xi'\eta} = -\frac{\xi\eta'-\xi'\eta}{\eta-\eta'}$, ou:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v} = \frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha+\cos\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\cos\mathrm{am}\beta+\sin\mathrm{am}\,\beta.\cos\mathrm{am}\,\alpha} =$$

$$= -\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\cos\mathrm{am}\beta-\sin\mathrm{am}\,\beta.\cos\mathrm{am}\,\alpha}{\cos\mathrm{am}\,\alpha-\cos\mathrm{am}\,\beta}.$$

(53) $\frac{y_2}{x_2 z_1} = \frac{\eta+\eta'}{\xi-\xi'} = -\frac{\xi+\xi'}{\eta-\eta'}$, ou:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha+\cos\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha-\sin\mathrm{am}\,\beta} = -\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha+\sin\mathrm{am}\,\beta}{\cos\mathrm{am}\,\alpha-\cos\mathrm{am}\,\beta}.$$

(54) $\frac{z_1}{x_1 y_2} = \frac{\zeta+\zeta'}{\xi+\xi'} = -k^2.\frac{\xi-\xi'}{\zeta-\zeta'}$, ou:

$$\frac{\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v} = \frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha+\Delta\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha+\sin\mathrm{am}\,\beta} = -k^2.\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha-\sin\mathrm{am}\,\beta}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha-\Delta\mathrm{am}\,\beta}.$$

(55) $\frac{z_1}{x_2 y_1} = \frac{\zeta+\zeta'}{\xi\zeta'-\xi'\zeta} = -k^2.\frac{\xi\zeta'+\xi'\zeta}{\zeta-\zeta'}$, ou: $\frac{\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u} =$

$$= \frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha+\Delta\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\beta-\sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha} = -k^2.\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta+\sin\mathrm{am}\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha-\Delta\mathrm{am}\,\beta}.$$

(56) $\frac{z_2}{x_1 y_2} = \frac{\zeta+\zeta'}{\xi\zeta'+\xi'\zeta} = -k^2.\frac{\xi\zeta'-\xi'\zeta}{\zeta-\zeta'}$, ou: $\frac{\Delta\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v} =$

$$= \frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha+\Delta\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\,\Delta\mathrm{am}\beta+\sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha} = -k^2.\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta-\sin\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha-\Delta\mathrm{am}\,\beta}.$$

(57) $\frac{z_2}{x_2 y_1} = \frac{\xi+\xi'}{\xi-\xi'} = -k^2.\frac{\xi+\xi'}{\zeta-\zeta'}$, ou:

$$\frac{\Delta\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u} = \frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha+\Delta\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha-\sin\mathrm{am}\,\beta} = -k^2.\frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha+\sin\mathrm{am}\,\beta}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha-\Delta\mathrm{am}\,\beta}.$$

(58) $\frac{y_1 y_2}{z_1 z_2} = \frac{\eta+\eta'}{\xi+\xi'} = \frac{1}{k^2}.\frac{\zeta-\zeta'}{\eta-\eta'}$, ou:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v}{\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v} = \frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha+\cos\mathrm{am}\,\beta}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha+\Delta\mathrm{am}\,\beta} = \frac{1}{k^2}.\frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha-\Delta\mathrm{am}\,\beta}{\cos\mathrm{am}\,\alpha-\cos\mathrm{am}\,\beta}.$$

(59) $\frac{x_1 x_2}{z_1 z_2} = \frac{1}{k'^2}.\frac{\eta'\zeta-\eta\zeta'}{\zeta+\zeta'} = -\frac{1}{k^2}\frac{\zeta-\zeta'}{\eta'\zeta+\eta\zeta'}$, ou: $\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,v}{\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v} =$

$$= \frac{1}{k'^2}\frac{\cos\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\,\alpha-\cos\mathrm{am}\,\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha+\Delta\mathrm{am}\,\beta} = -\frac{1}{k^2}\frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha-\Delta\mathrm{am}\,\beta}{\cos\mathrm{am}\beta.\Delta\mathrm{am}\alpha+\cos\mathrm{am}\,\alpha.\Delta\mathrm{am}\beta}.$$

(60) $\frac{x_1x_2}{y_1y_2} = \frac{1}{k'^2}\cdot\frac{\eta'\zeta - \eta\zeta'}{\eta + \eta'} = -\frac{\eta - \eta'}{\eta'\zeta + \eta\zeta'}$, ou: $\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,v}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,v} =$

$= \frac{1}{k'^2}\cdot\frac{\cos\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha - \cos\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\beta}{\cos\mathrm{am}\,\alpha + \cos\mathrm{am}\,\beta} = -\frac{\cos\mathrm{am}\,\alpha - \cos\mathrm{am}\,\beta}{\cos\mathrm{am}\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha + \cos\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\beta}$.

(61) $\frac{y_1z_2}{y_2z_1} = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\xi\zeta' + \xi'\zeta} = \frac{\xi\xi' - \xi'\zeta}{\xi\eta' - \xi'\eta}$, ou: $\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u} =$

$= \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\cos\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\cos\mathrm{am}\,\alpha}{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha}{\sin\mathrm{am}\alpha\,.\,\cos\mathrm{am}\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\cos\mathrm{am}\,\alpha}$.

(62) $\frac{x_1z_2}{x_2z_1} = \frac{\xi + \xi'}{\xi\eta' - \xi'\eta} = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\xi - \xi'}$, ou: $\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u} =$

$= \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha + \sin\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\cos\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\cos\mathrm{am}\,\alpha} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\cos\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\beta\,.\cos\mathrm{am}\alpha}{\sin\mathrm{am}\,\alpha - \sin\mathrm{am}\,\beta}$.

(63) $\frac{x_1y_2}{x_2y_1} = \frac{\xi + \xi'}{\xi\xi' - \xi'\zeta} = \frac{\xi\zeta' + \xi'\zeta}{\xi - \xi'}$, ou: $\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\cos\mathrm{am}\,u} =$

$= \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha + \sin\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha}{\sin\mathrm{am}\,\alpha - \sin\mathrm{am}\,\beta}$.

(64) $\frac{x_1y_2z_2}{x_2y_1z_1} = \frac{\xi + \xi'}{\xi - \xi'}$, ou: $\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha + \sin\mathrm{am}\,\beta}{\sin\mathrm{am}\,\alpha - \sin\mathrm{am}\,\beta}$.

(65) $\frac{x_1y_2z_1}{x_2y_1z_2} = \frac{\xi\zeta' + \xi'\zeta}{\xi\zeta' - \xi'\zeta}$, ou:

$\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha}{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha}$.

(66) $\frac{x_1y_1z_2}{x_2y_2z_1} = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\xi\eta' - \xi'\eta}$, ou:

$\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,v\,.\,\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\cos\mathrm{am}\,\beta + \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\cos\mathrm{am}\,\alpha}{\sin\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\cos\mathrm{am}\,\beta - \sin\mathrm{am}\,\beta\,.\,\cos\mathrm{am}\,\alpha}$.

(67) $\frac{x_1x_2}{y_1y_2z_1z_2} = \frac{1}{k'^2}\cdot\frac{\eta'\zeta - \eta\zeta'}{\eta'\zeta + \eta\zeta'}$, ou:

$\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}\,v}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,v\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v} = \frac{1}{k'^2}\cdot\frac{\cos\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha - \cos\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\beta}{\cos\mathrm{am}\,\beta\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha + \cos\mathrm{am}\,\alpha\,.\,\Delta\mathrm{am}\,\beta}$.

(68) $\frac{y_1y_2}{x_1x_2z_1z_2} = \frac{\eta + \eta'}{\eta - \eta'}$, ou: $\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\sin\mathrm{am}\,v\,.\Delta\mathrm{am}\,u\,.\Delta\mathrm{am}\,v} = \frac{\cos\mathrm{am}\alpha + \cos\mathrm{am}\beta}{\cos\mathrm{am}\alpha - \cos\mathrm{am}\beta}$.

(69) $\frac{z_1z_2}{x_1x_2y_1y_2} = -k^2\cdot\frac{\xi + \zeta'}{\zeta - \zeta'}$, ou:

$\frac{\Delta\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\sin\mathrm{am}\,v\,.\cos\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,v} = -k^2\frac{\Delta\mathrm{am}\,\alpha + \Delta\mathrm{am}\,\beta}{\Delta\mathrm{am}\,\alpha - \Delta\mathrm{am}\,\beta}$.

11. Si l'on pose $v = u$, on aura: $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $z_2 = z_1$, $\xi' = 0$, $\eta' = 1$, $\zeta' = 1$, $\xi = \sin\mathrm{am}\,(2u)$, $\eta = \cos\mathrm{am}\,(2u)$, $\zeta = \Delta\mathrm{am}\,(2u)$. Les équations (1), (8), (9), (10), (11), (34), (35), (36), (40), (41), (42) donneront alors:

$$(1)\quad \operatorname{sin\,am}(2u) = \frac{2\operatorname{sin\,am}u\,.\operatorname{cos\,am}u\,.\Delta\operatorname{am}u}{1-k^2\operatorname{sin}^4\operatorname{am}u}.$$

$$(2)\quad \operatorname{cos\,am}(2u) = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{\Delta^4\operatorname{am}u - k'^2}{1-k^2\operatorname{sin}^4\operatorname{am}u} = \frac{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}u - \operatorname{sin}^2\operatorname{am}u\,.\,\Delta^2\operatorname{am}u}{1-k^2\operatorname{sin}^4\operatorname{am}u} =$$

$$= \frac{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}u\,.\Delta^2\operatorname{am}u - k'^2\operatorname{sin}^2\operatorname{am}u}{1-k^2\operatorname{sin}^4\operatorname{am}u}.$$

$$(3)\quad \Delta\operatorname{am}(2u) = \frac{k'^2 + k^2\operatorname{cos}^4\operatorname{am}u}{1-k^2\operatorname{sin}^4\operatorname{am}u} = \frac{\Delta^2\operatorname{am}u - k^2\operatorname{sin}^2\operatorname{am}u\,.\operatorname{cos}^2\operatorname{am}u}{1-k^2\operatorname{sin}^4\operatorname{am}u} =$$

$$= \frac{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}u\,.\,\Delta^2\operatorname{am}u + k'^2\operatorname{sin}^2\operatorname{am}u}{1-k^2\operatorname{sin}^4\operatorname{am}u}.$$

$$(4)\quad \operatorname{cos\,am}(2u) + \Delta\operatorname{am}(2u) = \frac{2\operatorname{cos}^2\operatorname{am}u\,.\,\Delta^2\operatorname{am}u}{1-k^2\operatorname{sin}^4\operatorname{am}u}.$$

$$(5)\quad \operatorname{cos\,am}(2u) - \Delta\operatorname{am}(2u) = -\frac{2k'^2.\,\operatorname{sin}^2\operatorname{am}u}{1-k^2\operatorname{sin}^4\operatorname{am}u}.$$

$$(6)\quad \operatorname{sin}^2\operatorname{am}u = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1-\Delta\operatorname{am}(2u)}{1+\operatorname{cos\,am}(2u)} = \frac{1-\operatorname{cos\,am}(2u)}{1+\Delta\operatorname{am}(2u)}.$$

$$(7)\quad \operatorname{cos}^2\operatorname{am}u = \frac{\operatorname{cos\,am}(2u)+\Delta\operatorname{am}(2u)}{1+\Delta\operatorname{am}(2u)} = \frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{1-\Delta\operatorname{am}(2u)}{\Delta\operatorname{am}(2u)-\operatorname{cos\,am}(2u)}.$$

$$(8)\quad \Delta^2\operatorname{am}u = \frac{\operatorname{cos\,am}(2u)+\Delta\operatorname{am}(2u)}{1+\operatorname{cos\,am}(2u)} = k'^2.\frac{1-\operatorname{cos\,am}(2u)}{\Delta\operatorname{am}(2u)-\operatorname{cos\,am}(2u)}.$$

$$(9)\quad \frac{\operatorname{sin\,am}u}{\operatorname{cos\,am}u\,.\,\Delta\operatorname{am}u} = \frac{\operatorname{sin\,am}(2u)}{\operatorname{cos\,am}(2u)+\Delta\operatorname{am}(2u)} = \frac{1}{k'^2}\cdot\frac{\Delta\operatorname{am}(2u)-\operatorname{cos\,am}(2u)}{\operatorname{sin\,am}(2u)}.$$

$$(10)\quad \frac{\operatorname{cos\,am}u}{\operatorname{sin\,am}u\,.\,\Delta\operatorname{am}u} = \frac{1+\operatorname{cos\,am}(2u)}{\operatorname{sin\,am}(2u)} = \frac{\operatorname{sin\,am}(2u)}{1-\operatorname{cos\,am}(2u)}.$$

$$(11)\quad \frac{\Delta\operatorname{am}u}{\operatorname{sin\,am}u\,.\,\operatorname{cos\,am}u} = \frac{1+\Delta\operatorname{am}(2u)}{\operatorname{sin\,am}(2u)} = k^2.\frac{\operatorname{sin\,am}(2u)}{1-\Delta\operatorname{am}(2u)}.$$

12. Des équations du théorème fondamental de l'addition:

$$x_1(a + x_1^2) + by_1z_1 = o,$$
$$x_2(a + x_2^2) + by_2z_2 = o,$$
$$\xi(a + \xi^2) - b\eta\zeta = o,$$
$$b = x_1x_2\xi,\ a + 1 = y_1y_2\eta,\ ak^2 + 1 = z_1z_2\zeta,$$

on peut encore tirer une autre série de formules bien remarquables.

En substituant dans l'équation identique:

$$ak^2 + 1 - (a + 1)k^2 = k'^2$$

les valeurs de $ak^2 + 1$ et de $a + 1$, on aura l'équation:

$$z_1z_2\zeta - k^2y_1y_2\eta = k'^2, \text{ ou:}$$

$$(1)\quad \Delta\operatorname{am}u\,.\,\Delta\operatorname{am}v\,.\,\Delta\operatorname{am}(u+v) - k^2\operatorname{cos\,am}u\,.\,\operatorname{cos\,am}v\,.\operatorname{cos\,am}(u+v) = k'^2.$$

Si dans les trois premières équations on fait usage des trois transformations suivantes:

$$a + x^2 = a + 1 - y^2 = \frac{ak^2 + 1 - z^2}{k^2} = \frac{(a+1)z^2 - (ak^2+1)y^2}{k'^2},$$

on aura neuf nouvelles équations.

Par la première transformation: $a + x^2 = a + 1 - y^2$, on trouvera en divisant par x_1y_1, x_2y_2, et $\xi\eta$:

$\frac{a+1}{y_1} - y_1 + \frac{bz_1}{x_1} = o$, ou: $y_2\eta - y_1 + x_2\xi z_1 = o$, et de là: $y_1 = y_2\eta + x_2z_1\xi$, ou:

(2) $\cos am\, u = \cos am\, v \,.\, \cos am\,(u+v) + \sin am\, v \,.\, \Delta am\, u \,.\, \sin am\,(u+v)$

$\frac{a+1}{y_2} - y_2 + \frac{bz_2}{x_2} = o$, ou: $y_1\eta - y_2 + x_1\xi z_2 = o$, et de là: $y_2 = y_1\eta + x_1z_2\xi$, ou:

(3) $\cos am\, v = \cos am\, u \,.\, \cos am\,(u+v) + \sin am\, u \,.\, \Delta am\, v \,.\, \sin am\,(u+v)$

$\frac{a+1}{\eta} - \eta - \frac{b\zeta}{\xi} = o$, ou: $y_1y_2 - \eta - x_1x_2\zeta = o$, et de là: $\eta = y_1y_2 - x_1x_2\zeta$, ou:

(4) $\cos am\,(u+v) = \cos am\, u \,.\, \cos am\, v - \sin am\, u \,.\, \sin am\, v \,.\, \Delta am\,(u+v)$.

Par la seconde transformation: $a + x^2 = \frac{ak^2 + 1 - z^2}{k^2}$, on trouvera en divisant par $\frac{x_1z_1}{k^2}$, $\frac{x_2z_2}{k^2}$ et $\frac{\xi\zeta}{k^2}$:

$\frac{ak^2+1}{z_1} - z_1 + \frac{k^2by_1}{x_1} = o$, ou: $z_2\zeta - z_1 + k^2x_2\xi y_1 = o$, et de là: $z_1 = z_2\zeta + k^2x_2y_1\xi$, ou:

(5) $\Delta am\, u = \Delta am\, v \,.\, \Delta am\,(u+v) + k^2 \sin am\, v \,.\, \cos am\, u \,.\, \sin am\,(u+v)$.

$\frac{ak^2+1}{z_2} - z_2 + \frac{k^2by_2}{x_2} = o$, ou: $z_1\zeta - z_2 + k^2x_1\xi y_2 = o$, et de là: $z_2 = z_1\zeta + k^2x_1y_2\xi$, ou:

(6) $\Delta am\, v = \Delta am\, u \,.\, \Delta am\,(u+v) + k^2 \sin am\, u \,.\, \cos am\, v \,.\, \sin am\,(u+v)$.

$\frac{ak^2+1}{\zeta} - \zeta - \frac{k^2b\eta}{\xi} = o$, ou: $z_1z_2 - \zeta - k^2x_1x_2\eta = o$, et de là: $\zeta = z_1z_2 - k^2x_1x_2\eta$, ou:

(7) $\Delta am\,(u+v) = \Delta am\, u \,.\, \Delta am\, v - k^2 \sin am\, u \,.\, \sin am\, v \,.\, \cos am\,(u+v)$.

Par la troisième transformation: $a + x^2 = \frac{(a+1)\,z^2 - (ak^2+1)\,y^2}{k'^2}$, on trouvera en divisant par $\frac{x_1y_1z_1}{k'^2}$, $\frac{x_2y_2z_2}{k'^2}$ et $\frac{\xi\eta\zeta}{k'^2}$:

$\frac{(a+1)\,.\,z_1}{y_1} - \frac{(ak^2+1)y_1}{z_1} + \frac{k'^2b}{x_1} = o$, ou: $y_2\eta z_1 - z_2\zeta y_1 + k'^2x_2\xi = o$,

et de là: $k'^2x_2\xi = y_1z_2\zeta - y_2z_1\eta$, ou:

(8) $k'^2 \,.\, \sin am\, v \,.\, \sin am\,(u+v) =$

$= \cos am\, u \,.\, \Delta am\, v \,.\, \Delta am\,(u+v) - \cos am\, v \,.\, \Delta am\, u \,.\, \cos am\,(u+v)$.

$\frac{(a+1)z_2}{y_2} - \frac{(ak^2+1)y_2}{z_2} + \frac{k'^2b}{x_2} = o$, ou: $y_1\eta z_2 - z_1\zeta y_2 + k'^2x_1\xi = o$,

et de là: $k'^2x_1\xi = y_2z_1\zeta - y_1z_2\eta$, ou:

(9) $k'^2 \sin am\, u \,.\, \sin am\,(u+v) =$

$= \cos am\, v \,.\, \Delta am\, u \,.\, \Delta am\,(u+v) - \cos am\, u \,.\, \Delta am\, v \,.\, \cos am\,(u+v)$.

$\frac{(a+1)\zeta}{\eta} - \frac{(ak^2+1)\eta}{\zeta} - \frac{k'^2 b}{\xi} = o$, ou : $y_1 y_2 \zeta - z_1 z_2 \eta - k'^2 x_1 x_2 = o$, et de là:

$k'^2 x_1 x_2 = y_1 y_2 \zeta - z_1 z_2 \eta$, ou :

(10) $k'^2 . \sin am\, u . \sin am\, v =$

$= \cos am\, u . \cos am\, v . \Delta am(u+v) - \Delta am\, u . \Delta am\, v . \cos am(u+v)$.

Des équations (2) — (7) on tire six nouvelles équations par substitution. Ainsi des équations (2) et (4) on tire:

$y_1 = y_1 y_2^2 - x_1 x_2 y_2 \zeta + x_2 z_1 \xi$, et de là: $x_2^2 y_1 = x_2 z_1 \xi - x_1 x_2 y_2 \zeta$, ou en divisant par x_2: $x_2 y_1 = z_1 \xi - x_1 y_2 \zeta$, ou :

(11) $\sin am\, v . \cos am\, u = \Delta am\, u . \sin am(u+v) - \sin am\, u . \cos am\, v . \Delta am(u+v)$.

De plus on tire des mêmes équations:

$\eta = y_2^2 \eta + x_2 y_2 z_1 \xi - x_1 x_2 \zeta$, et de là: $x_2^2 \eta = x_2 y_2 z_1 \xi - x_1 x_2 \zeta$, ou en divisant par x_2: $x_2 \eta = y_2 z_1 \xi - x_1 \zeta$, ou :

(12) $\sin am\, v . \cos am(u+v) = \cos am\, v . \Delta am\, u . \sin am(u+v) - \sin am\, u . \Delta am(u+v)$.

Des équations (3) et (4) on tire:

$y_2 = y_1^2 y_2 - x_1 x_2 y_1 \zeta + x_1 z_2 \xi$, et de là: $x_1^2 y_2 = x_1 z_2 \xi - x_1 x_2 y_1 \zeta$, ou en divisant par x_1: $x_1 y_2 = z_2 \xi - x_2 y_1 \zeta$, ou:

(13) $\sin am\, u . \cos am\, v = \Delta am\, v . \sin am(u+v) - \sin am\, v . \cos am\, u . \Delta am(u+v)$.

Des mêmes équations on tire de plus:

$\eta = y_1^2 \eta + x_1 y_1 z_2 \xi - x_1 x_2 \zeta$, et de là: $x_1^2 \eta = x_1 y_1 z_2 \xi - x_1 x_2 \zeta$, ou en divisant par x_1: $x_1 \eta = y_1 z_2 \xi - x_2 \zeta$, ou :

(14) $\sin am\, u . \cos am(u+v) = \cos am\, u . \Delta am\, v . \sin am(u+v) - \sin am\, v . \Delta am(u+v)$.

Des équations (5) et (7) on tire;

$z_1 = z_1 z_2^2 - k^2 x_1 x_2 z_2 \eta + k^2 x_2 y_1 \xi$, et de là: $k^2 x_2^2 z_1 = k^2 x_2 y_1 \xi - k^2 x_1 x_2 z_2 \eta$, ou en divisant par $k^2 x_2$: $x_2 z_1 = y_1 \xi - x_1 z_2 \eta$, ou:

(15) $\sin am\, v . \Delta am\, u = \cos am\, u . \sin am(u+v) - \sin am\, u . \Delta am\, v . \cos am(u+v)$.

Enfin des équations (6) et (7) on tire:

$z_2 = z_1^2 z_2 - k^2 x_1 x_2 z_1 \eta + k^2 x_1 y_2 \xi$, et de là: $k^2 x_1^2 z_2 = k^2 x_1 y_2 \xi - k^2 x_1 x_2 z_1 \eta$, ou en divisant par $k^2 x_1$: $x_1 z_2 = y_2 \xi - x_2 z_1 \eta$, ou:

(16) $\sin am\, u . \Delta am\, v = \cos am\, v . \sin am(u+v) - \sin am\, v . \Delta am\, u . \cos am(u+v)$.

Si l'on change le signe de v, on aura encore 16 formules correspondantes.

13. Des formules précédentes les formules (2), (3) et (4) ont donné lieu à la célèbre construction de Lagrange, suivant laquelle *si les trois côtés d'un triangle*, ABC, *sont:* $a = am\, u$, $b = am\, v$, $c = am(u \pm v)$ *ces amplitudes étant toutes supposées réelles et positives, le rapport constant des sinus des côtés et des angles opposés séra égal au module* k:

$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = k$, $\sin A = k . \sin a$, $\sin B = k . \sin b$, $\sin C = k . \sin c$,

et les cosinus des angles seront au signe près égaux à: Δ am u, Δ am v, Δ am (u $\pm$ v).

En effet on a dans la trigonométrie sphérique les trois formules fondamentales:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c - \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A,$$
$$\cos b = \cos a \,.\, \cos c - \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos B,$$
$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b - \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos C.$$

En substituant les valeurs: a = am u, b = am v, c = am (u $\pm$ v), ces formules deviendront:

$$\cos \text{am}\, u = \cos \text{am}\, v \,.\, \cos \text{am}\,(u \pm v) - \sin \text{am}\, v \,.\, \sin \text{am}\,(u \pm v) \,.\, \cos A,$$
$$\cos \text{am}\, v = \cos \text{am}\, u \,.\, \cos \text{am}\,(u \pm v) - \sin \text{am}\, u \,.\, \sin \text{am}\,(u \pm v) \,.\, \cos B,$$
$$\cos \text{am}\,(u \pm v) = \cos \text{am}\, u \,.\, \cos \text{am}\, v - \sin \text{am}\, u \,.\, \sin \text{am}\, v \,.\, \cos C,$$

et en comparant ces formules avec les trois formules (2), (3) et (4) du paragraphe précédent on en déduira:

$$\cos A = \mp \Delta \text{am}\, u, \quad \cos B = -\Delta \text{am}\, v, \quad \cos C = \pm \Delta \text{am}\,(u \pm v).$$

De là on trouve de plus:

$$\sin A = k.\sin \text{am}\, u = k \sin a, \sin B = k.\sin \text{am}\, v = k.\sin b, \sin C = k.\sin \text{am}\,(u \pm v) = k.\sin c,$$

donc: $\dfrac{\sin A}{\sin a} = \dfrac{\sin B}{\sin b} = \dfrac{\sin C}{\sin c} = k.$

14. Si dans les formules du **5** on fait x_2 égal à une constante arbitraire, donc: $dx_2 = 0$, on aura les conditions qui doivent avoir lieu entre les fonctions elliptiques x_1 et ξ, pour que:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2} \,.\, \sqrt{1-k^2x_1^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} \,.\, \sqrt{1-k^2\xi^2}},$$

ou, ce qui revient au même, les équations du **5** représenteront l'intégrale générale de cette équation différentielle.

Si l'on donne dans ces intégrales générales à la constante indéterminée x_2 des valeurs particulières, on trouvera des intégrales particulières. On en doit remarquer celles, qu'on trouvera en supposant:

$$x_2 = 0, \quad x_2 = \infty, \quad x_2 = \pm 1, \quad x_2 = \pm \frac{1}{k}.$$

Si l'on pose c au lieu de x_2 et x, y, z au lieu de x_1, y_1, z_1, on aura l'équation différentielle:

$$(1) \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \,.\, \sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} \,.\, \sqrt{1-k^2\xi^2}},$$

dont l'intégrale générale sera:

$$(2) \quad \xi = \frac{x\sqrt{1-c^2} \,.\, \sqrt{1-k^2c^2} + c\sqrt{1-x^2} \,.\, \sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2c^2x^2},$$

et dont on remarquera les intégrales particulières:

(3) $\xi = x,\ \xi = \pm\frac{1}{kx},\ \xi = \pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}},\ \xi = \pm\frac{1}{k}\cdot\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$

On peut introduire $\eta = \sqrt{1-\xi^2}$, ou $\zeta = \sqrt{1-k^2\xi^2}$ comme variables au lieu de ξ. On aura alors:

$$\xi = \sqrt{1-\eta^2} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{k},\ \eta = \sqrt{1-\xi^2} = \frac{\sqrt{\zeta^2-k'^2}}{k},\ \zeta = \sqrt{1-k^2\xi^2} =$$
$$= \sqrt{k'^2+k^2\eta^2},$$

et l'équation differentielle (1) aura la forme:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = -\frac{d\eta}{\xi\zeta} = -\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}\cdot\sqrt{k'^2+k^2\eta^2}},$$

dont l'intégrale générale est donnée par l'équation (2) du **5**:

$$\eta = \frac{\sqrt{1-c^2}\cdot\sqrt{1-x^2} - c\sqrt{1-k^2c^2}\cdot x\cdot\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2c^2x^2},$$

ou la forme:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = -\frac{d\zeta}{k^2\xi\eta} = -\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}\cdot\sqrt{\zeta^2-k'^2}},$$

dont l'intégrale générale est donnée par l'équation (3) dn **5**:

$$\zeta = \frac{\sqrt{1-k^2c^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2} - k^2c\cdot\sqrt{1-c^2}\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}}{1-k^2c^2x^2}.$$

On donnera à la première de ces équations différentielles une forme plus commode, si l'on considère $-\frac{\eta}{k'}$ comme variable au lieu de η. Nous désignerons cette variable de nouveau par ξ, et poserons: $\xi = -\frac{\eta}{k'}$, $\eta = -k'\xi$, et nous aurons alors l'équation différentielle:

$$(4)\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\xi^2}\cdot\sqrt{1+k^2\xi^2}},$$

dont l'intégrale générale sera:

$$(5)\quad \xi = \frac{1}{k'}\cdot\frac{c\sqrt{1-k^2c^2}\cdot x\sqrt{1-k^2x^2} - \sqrt{1-c^2}\cdot\sqrt{1-x^2}}{1-k^2c^2x^2}.$$

et dont on remarquera les intégrales particulières:

$$(6)\quad \xi = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{k'},\ \xi = \pm\frac{i\sqrt{1-k^2x^2}}{kk'x},\ \xi = \pm\frac{x}{\sqrt{1-k^2x^2}},\ \xi = \pm\frac{i}{k\sqrt{1-x^2}}.$$

On donnera à la seconde équation différentielle une forme plus commode, si l'on y considère $-\frac{\zeta}{k'}$ comme variable au lieu de ζ. Nous désignerons cette variable de nouveau par ξ, et poserons: $\xi = -\frac{\zeta}{k'}$, $\zeta = -k'\xi$, et nous aurons alors l'équation différentielle:

$$(7)\quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\xi^2}\cdot\sqrt{\xi^2-1}},$$

dont l'intégrale générale sera:

$$(8)\quad \xi = \frac{1}{k'}\cdot\frac{k^2c\,.\,\sqrt{1-c^2}\,.\,x\,.\,\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-k^2c^2}\,.\,\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2c^2x^2},$$

et dont on remarquera les intégrales particulières:

$$(9)\quad \xi = -\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{k'},\ \xi = \pm i\frac{\sqrt{1-x^2}}{k'x},\ \xi = \pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}},\ \xi = \pm\frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On remarque ici que les intégrales particulières (3), (6), et (9) sont toutes à un coefficient constant près égales aux quotients de deux des quatre quantités 1, x, $y = \sqrt{1-x^2}$, et $z = \sqrt{1-k^2x^2}$.

Chapitre second.

Intégrales elliptiques complètes.

15. Les valeurs que l'intégrale elliptique:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-k^2x^2}}$$

acquiert aux limites, où les deux valeurs du radical $\sqrt{1-x^2}$, et les deux valeurs du radical $\sqrt{1-k^2x^2}$ coincident, jouent un grand rôle dans la théorie des fonctions elliptiques.

Ces valeurs de la variable indépendante x sont: $x = \pm 1$, $x = \pm\frac{1}{k}$. Puisque l'intégrale change de signe avec x, nous considérons seulement les valeurs positives: $x = +1$, $x = +\frac{1}{k}$.

On nomme l'intégrale correspondante à la valeur $x = +1$, *l'intégrale complète*, et on la désigne par la grande lettre correspondante à celle par laquelle le module, dont elle est fonction, est désigné. Ainsi on a pour le module k:

$$K = F(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

et pour le module complémentaire k':

$$K' = F(k') = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-k'^2x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}.$$

Pour bien fixer la définition de l'intégrale complète, on suppose de plus que les radicaux: $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1-k^2x^2}$ et $\sqrt{1-k'^2x^2}$ ne changent pas les signes pendant l'intégration, et que les radicaux $\sqrt{1-k^2x^2}$ et $\sqrt{1-k'^2x^2}$ finissent pour la valeur $x = 1$ par les valeurs $+k'$ et $+k$. Puisque les trois radicaux commencent pour $x = 0$ par la valeur $+1$, il suit de là qu'elles doivent toujours rester positives, et qu'en cas de valeurs imaginai-

res, leurs parties réelles resteront positives. De plus puisque $\sqrt{1-k^2x^2}$ finit pour $x = 1$ par la valeur $\sqrt{1-k^2} = +k'$, et que pour des valeurs réelles, mais négatives de $1-k^2$ on a suivant 1: $+k' = \sqrt{1-k^2} = \frac{\sqrt{k^2-1}}{i} = -i\sqrt{k^2-1}$, il faut que pour des valeurs réelles, mais négatives de $1-k^2x^2$ on a: $\sqrt{1-k^2x^2} = \frac{\sqrt{k^2x^2-1}}{i} = -i\sqrt{k^2x^2-1}$. De même il faut que pour des valeurs réelles, mais négatives de $1-k'^2x^2$ on a: $\sqrt{1-k'^2x^2} = \frac{\sqrt{k'^2x^2-1}}{i} = -i\sqrt{k'^2x^2-1}$. Pour ce qui concerne le signe du radical $\sqrt{1-x^2}$ dans le cas de valeurs réelles mais négatives de $1-x^2$, on peut supposer que toujours: $\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{i} = -i\sqrt{x^2-1}$, ou que toujours: $\sqrt{1-x^2} = +i\sqrt{x^2-1} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{i}$.

On tire des deux équations précédentes:

$\sin am(K,k) = +1$, $\cos am(K,k) = 0$, $\Delta am(K,k) = +k'$,

$\sin am(K',k') = +1$, $\cos am(K',k') = 0$, $\Delta am(K',k') = +k$.

Si k^2 est une quantité réelle, positive et moindre que l'unité, on trouvera l'intégrale complète K en série convergente en développant la dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ en série convergente. On aura alors:

$$(1)\quad K = F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 + \tfrac{1}{2}k^2\sin\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 + (\tfrac{1}{2})^2k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6 + \ldots\right\}.$$

Si k^2 est une quantité réelle et positive, mais plus grande que l'unité, on pose: $k = \frac{1}{l}$, où l sera une quantité positive moindre que l'unité. Si l'on pose de plus: $kx = \frac{x}{l} = \xi$, $x = l\xi$, on aura:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}} = l\cdot\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-l^2\xi^2}\cdot\sqrt{1-\xi^2}} =$$

$$= l\left\{\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-l^2\xi^2}\cdot\sqrt{1-\xi^2}} + \int_1^{\frac{1}{l}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-l^2\xi^2}\cdot\sqrt{1-\xi^2}}\right\}.$$

On a maintenant: $\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-l^2\xi^2}\cdot\sqrt{1-\xi^2}} = L = F(l)$. De plus puisque il est supposé que: $\sqrt{1-k^2x^2} = \frac{\sqrt{k^2x^2-1}}{i}$, ou $\sqrt{1-\xi^2} = \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{i}$, on aura:

$$\int_1^{\frac{1}{l}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-l^2\xi^2}.\sqrt{1-\xi^2}} = i\int_1^{\frac{1}{l}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-l^2\xi^2}.\sqrt{\xi^2-1}},$$

où $\sqrt{\xi^2-1}$ et $\sqrt{1-l^2\xi^2}$ resteront positives entre les limites de l'intégration.

En comparant maintenant la différentielle de cette dernière intégrale avec l'équation (7) du **14**, où l'on changera k′ en l, donc k en $l' = \sqrt{1-l^2}$, on trouvera que l'équation différentielle:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-l'^2x^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-l^2\xi^2}.\sqrt{\xi^2-1}}$$

sera satisfaite par l'intégrale particulière: $\xi = \frac{1}{\sqrt{1-l'^2x^2}}$. De là on trouve: $x = \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{l'\xi}$, $\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-l^2\xi^2}}{l'\xi}$, $\sqrt{1-l'^2x^2} = \frac{1}{\xi}$. Aux limites $\xi = 1$ et $\xi = \frac{1}{l}$ correspondent donc les limites $x = 0$ et $x = 1$, et les radicaux $\sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{1-l'^2x^2}$ resteront positifs entre ces limites. Donc on aura:

$$\int_1^{\frac{1}{l}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-l^2\xi^2}.\sqrt{\xi^2-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-l'^2x^2}} = L' = F(l') = F\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right).$$

On aura donc dans le cas de $k^2 > 1$:

(2) $$K = F(k) = l(L + iL') = \frac{1}{k}\left(F\left(\frac{1}{k}\right) + i\,F\left(\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}\right)\right).$$

Si k^2 est une quantité réelle mais négative, $k^2 = -l^2$, où l^2 est une quantité positive, on aura:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1+l^2x^2}}.$$

Cette intégrale peut être développée dans la série:

$$K = F(\sqrt{-l^2}) = F(-il) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - (\tfrac{1}{2})^2 l^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 l^4 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 l^6 + \ldots\right\}.$$

Cette série ne se distingue de la série (1) que par les signes alternatifs de ces termes. Mais on peut aussi facilement réduire cette intégrale à la forme ordinaire. En effet on la réduira à la forme (4) du **14** par la substitution: $x = m'\xi$, $lm' = \sqrt{1-m'^2} = m$, où $m' = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}$, $m = \frac{l}{\sqrt{1+l^2}}$ seront moindres que l'unité. On aura alors:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1+l^2x^2}} = m'\int_0^{\frac{1}{m'}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-m'^2\xi^2}.\sqrt{1+m^2\xi^2}}$$

où les radicaux $\sqrt{1-m'^2\xi^2}$ et $\sqrt{1+m^2\xi^2}$ resteront positifs entre les limites de l'intégration.

En comparant la différentielle de cette dernière intégrale avec l'équation (4) du **14**, où l'on changera k et k′ en m et m′, on trouvera que l'équation différentielle:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-m^2x^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-m'^2\xi^2}.\sqrt{1+m^2\xi^2}}$$

sera satisfaite par l'intégrale particulière: $\xi = \frac{x}{\sqrt{1-m^2x^2}}$. De là on trouve:

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{1+m^2\xi^2}},\quad \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-m'^2\xi^2}}{\sqrt{1+m^2\xi^2}},\quad \sqrt{1-m^2x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\xi^2}}.$$

Aux limites $\xi = o$ et $\xi = \frac{1}{m'}$, correspondent donc les limites $x = o$ et $x = 1$, et les radicaux $\sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{1-m^2x^2}$ resteront positifs entre ces limites. Donc on aura:

$$\int_0^{\frac{1}{m'}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-m'^2\xi^2}.\sqrt{1+m^2\xi^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\ .\ \sqrt{1-m^2x^2}} =$$

$$= M = F(m) = F\left(\frac{l}{\sqrt{1+l^2}}\right) = F\left(\frac{\sqrt{-k^2}}{\sqrt{1-k^2}}\right) = F\left(\frac{\sqrt{-k^2}}{k'}\right).$$

On aura donc dans le cas de k^2 négative:

$$(3)\quad K = F(k) = F(-i\sqrt{-k^2}) = m'.M = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}} F\left(\frac{l}{\sqrt{1+l^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} F\left(\frac{\sqrt{-k^2}}{\sqrt{1-k^2}}\right) = \frac{1}{k'} F\left(\frac{\sqrt{-k^2}}{k'}\right).$$

Si enfin k^2 est une quantité imaginaire, k le sera aussi, et on aura: $k = a + ib$, a et b étant des quantités réelles et a positive. On a alors: $1 - k^2x^2 = 1 - (a^2 - b^2 + 2iab)x^2 = 1 - (a^2 - b^2)x^2 - 2iabx^2 = r(\cos p + i \sin p)$, où: $r \cos p = 1 - (a^2 - b^2)x^2$, $r \sin p = -2abx^2$.

$$\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{r}\left(\cos\left(\tfrac{p}{2}\right) + i \sin\left(\tfrac{p}{2}\right)\right),\quad \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\cos\left(\tfrac{p}{2}\right) - i\sin\left(\tfrac{p}{2}\right)\right).$$

On voit de là que, tant que x varie de o à 1 en restant toujours réelle, sin p aura toujours le signe contraire à celui de b. De plus, puisque nous avons supposé que la partie réelle du radical $\sqrt{1-k^2x^2}$ restera toujours positive, $\cos\left(\frac{p}{2}\right)$ restera toujours positive. De là on trouve que $\sin\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{\sin p}{2\cos\left(\frac{p}{2}\right)}$ aura toujours le même signe que sin p, donc le signe contraire à celui de l. On a maintenant:

$$(4)\quad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^1 \frac{\left(\cos\left(\frac{p}{2}\right) - i\sin\left(\frac{p}{2}\right)\right).dx}{\sqrt{r}.\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{p}{2}\right).dx}{\sqrt{r}.\sqrt{1-x^2}} - i\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{p}{2}\right).dx}{\sqrt{r}.\sqrt{1-x^2}} = A + iB,$$

où: $$A = \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{p}{2}\right).dx}{\sqrt{r}.\sqrt{1-x^2}},\quad B = -\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{p}{2}\right).dx}{\sqrt{r}.\sqrt{1-x^2}}$$

seront des quantités reelles. A aura le même signe que $\cos\left(\frac{p}{2}\right)$ et sera donc positive, B aura le signe contraire à $\sin\left(\frac{p}{2}\right)$, donc le même signe que b.

On peut développer les quantités A et B en séries convergentes en développant leurs différentielles sous le signe d'intégration en séries convergentes. Il nous suffira ici de préciser leurs signes.

Les formules précédentes qui donnent la valeur de K dans les cas du carré du module, k^2, positif et plus petit que l'unité, de k^2 plus grand que l'unité, de k^2 négatif, et de k^2 imaginaire, donnent en même temps *l'intégrale complète* complémentaire: $K' = F(k')$. En effet, si le carré du module, k^2, est positif et plus petit que l'unité, le carré du module complémentaire, $k'^2 = 1 - k^2$, sera de même positif et plus petit que l'unité, et on aura:

$$(5)\quad K' = F(k') = \frac{\pi}{2}\left\{1 + (\tfrac{1}{2})^2 . k'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . k'^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . k'^6 + \ldots\right\}.$$

Si k^2 est positif et plus grand que l'unité, $k = \frac{1}{l}$, on aura: $k'^2 = 1 - k^2 = 1 - \frac{1}{l^2} = \frac{l^2-1}{l^2} = -\frac{l'^2}{l^2}$. On trouvera alors K' de l'équation (3) si l'on y pose $\frac{l'}{l}$ au lieu de l. On aura alors: $m = l'$, $m' = l$, et:

$$(6)\quad K' = F(k') = l . L' = l . F(l') = \frac{1}{k} F\left(\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}\right) = \frac{1}{k} F\left(\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}\right).$$

Si le carré du module est négatif, $k^2 = -l^2$, le module complémentaire deviendra: $k' = \sqrt{1 + l^2}$, donc plus grand que l'unité. On trouve alors K' de l'équation (2), si l'on y pose k' au lieu de k:

$$K' = F(k') = \frac{1}{k'}\left\{F\left(\frac{1}{k'}\right) + iF\left(\sqrt{1 - \frac{1}{k'^2}}\right)\right\} = \frac{1}{k'}\left\{F\left(\frac{1}{k'}\right) + i\,F\left(\frac{\sqrt{-k^2}}{k'}\right)\right\}.$$

Enfin si le module est imaginaire, $k = a + ib$, où a et b sont des quantités réelles et a positive, k' sera aussi imaginaire, $k' = a' + ib'$ où a' et b' sont des quantités réelles, déterminées par les équations:

$$a^2 - b^2 + a'^2 - b'^2 = 1;\quad ab + a'b' = 0,$$

et a' une quantité positive. De la dernière de ces équations on trouve: $b' = -\frac{ab}{a'}$. Donc puisque a et a' sont des quantités positives, b' aura le signe contraire à celui de b. Donc on aura, en vertu de l'équation (4):

$$(8)\qquad K' = A' + iB',$$

où A' et B' sont des quantités réelles, A' positive et B' de même signe que b', donc de signe contraire à celui de b. Les quantités B et B' ont donc toujours des signes contraires.

16. Cherchons maintenant la valeur de l'intégrale elliptique entre les limites o et $\frac{1}{k}$. Nous ferons sur les valeurs des radicaux $\sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{1-k^2x^2}$ les mêmes suppositions que dans le paragraphe précédent, savoir qu'ils ne changent pas les signes pendant l'intégration, et que pour la valeur $x = 1$ on a: $\sqrt{1-k^2x^2} = +k'$.

De là il suit que les parties réelles des deux radicaux doivent toujours rester positives, puisque pour $x = o$ ces radicaux commencent par la valeur $+1$.

De plus, si le carré de k^2 est une quantité réelle, positive et plus grande que l'unité, on aura pour des valeurs réelles mais négatives de $1 - k^2x^2$: $\sqrt{1-k^2x^2} = +\frac{\sqrt{k^2x^2-1}}{i} = -i\sqrt{k^2x^2-1}$, puisque pour des valeurs négatives de $k'^2 = 1 - k^2$ on a: $k' = +\frac{\sqrt{k^2-1}}{i} = -i\sqrt{k^2-1}$. Si k^2 est réelle mais plus petite que l'unité, ou si k^2 est une quantité imaginaire, on peut pour des valeurs réelles mais négatives de $1 - k^2x^2$ supposer: $\sqrt{1-k^2x^2} = +\frac{\sqrt{k^2x^2-1}}{i} = -i\sqrt{k^2x^2-1}$, ou $\sqrt{1-k^2x^2} = +i\sqrt{k^2x^2-1} = -\frac{\sqrt{k^2x^2-1}}{i}$, seulement qu'on ne change jamais pendant l'intégration de l'une à l'autre de ces suppositions.

De même pour des valeurs réelles mais négatives de $1 - x^2$ on peut supposer que: $\sqrt{1-x^2} = +\frac{\sqrt{x^2-1}}{i} = -i\sqrt{x^2-1}$ ou que $\sqrt{1-x^2} = +i\sqrt{x^2-1} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{i}$. Dans le cas de la première supposition le radical $\sqrt{1-x^2}$ finira pour $x = \frac{1}{k}$ par la valeur: $\sqrt{1-\frac{1}{k^2}} = -i\sqrt{\frac{1}{k^2}-1} = -\frac{ik'}{k}$; dans le cas de la seconde supposition le radical finira pour $x = \frac{1}{k}$ par la valeur: $\sqrt{1-\frac{1}{k^2}} = +i\sqrt{\frac{1}{k^2}-1} = +\frac{ik'}{k}$.

Si le carré du module k, k^2, est une quantité réelle, positive et plus petite que l'unité, k et k' seront tous les deux des quantités réelles, ces deux suppositions sont admissibles toutes les deux, et l'intégrale aura deux valeurs différentes selon que l'on aura suivi l'une ou l'autre de ces suppositions. Si le carré k^2 est une quantité réelle, positive, mais plus grande que l'unité, $\frac{ik'}{k} = \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$ sera une quantité réelle et positive, puisque $k' = -i\sqrt{k^2-1}$; donc il faudra alors que $\sqrt{1-x^2}$ finisse par la valeur: $+\frac{ik'}{k}$, et que pour des valeurs réelles, mais négatives de $1 - x^2$ on ait: $\sqrt{1-x^2} = +i\sqrt{x^2-1} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{i}$. Si k^2 est une quantité réelle mais négative, on a: $k = \frac{\sqrt{-k^2}}{i} = -i\sqrt{-k^2}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$ sera une quantité réelle et positive, et $\frac{ik'}{k} = -\frac{k'}{\sqrt{-k^2}}$ sera une quantité réelle et négative; donc il faudra alors que $\sqrt{1-x^2}$ finisse par la valeur: $-\frac{ik'}{k}$, et que pour des valeurs réelles mais négatives de $1 - x^2$ on ait: $\sqrt{1-x^2} = +\frac{\sqrt{x^2-1}}{i} = -i\sqrt{x^2-1}$. Enfin si k^2 est une quantité imaginaire, k et k' seront tous les deux des quantités imaginaires: $k = a + ib$, $k' = a' + ib'$, où a et a' sont des quantités

réelles positives, b et b' des quantités réelles et des signes contraires. On aura alors: $\frac{ik'}{k} = \frac{-b' + ia'}{a + ib} = \frac{a'b - ab'}{a^2 + b^2} + i\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}$. Donc si $a'b - ab'$ est une quantité positive, il faudra que $\sqrt{1-x^2}$ finisse par la valeur: $+\frac{ik'}{k}$, et qu'on ait: $\sqrt{1-x^2} = +i\sqrt{x^2-1} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{i}$. Si au contraire $a'b - ab'$ est une quantité négative, il faudra que $\sqrt{1-x^2}$ finît par la valeur: $-\frac{ik'}{k}$, et qu'on ait: $\sqrt{1-x^2} = +\frac{\sqrt{x^2-1}}{i} = -i\sqrt{x^2-1}$.

Puisque pour $x = 1$ on a toujours $\sqrt{1-k^2x^2} = +k'$, on aura:

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}$$

$$= K \pm i\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}.\sqrt{1-k^2x^2}},$$

où le signe du second terme sera $+$ ou $-$, suivant qu'on a: $\sqrt{1-x^2} = +\frac{\sqrt{x^2-1}}{i}$, ou qu'on a: $\sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{i}$, ou, ce qui vaut le même, suivant que ce radical finît pour $x = \frac{1}{k}$ par la valeur: $-\frac{ik'}{k}$, ou par la valeur: $+\frac{ik'}{k}$.

En comparant la différentielle de la dernière intégrale avec l'équation (7) du **14** où l'on changera x et ξ, k et k', on trouve que l'équation différentielle:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}.\sqrt{1-k'^2\xi^2}}$$

sera satisfaite par l'intégrale particulière: $x = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\xi^2}}$, $\xi = \frac{\sqrt{x^2-1}}{k'x}$, $\sqrt{1-\xi^2} = \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{k'x}$, $\sqrt{1-k'^2\xi^2} = \frac{1}{x}$. Aux limites $x = 1$ et $x = \frac{1}{k}$ correspondent alors les limites $\xi = 0$ et $\xi = 1$. Donc on aura:

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}.\sqrt{1-k'^2\xi^2}}.$$

Puisque les variables x et ξ doivent varier d'une manière continue entre les limites de l'intégration, et puisque le radical $\sqrt{1-k^2x^2}$ ne change pas de signe, les radicaux $\sqrt{1-\xi^2}$ et $\sqrt{1-k'^2\xi^2}$ ne changeront pas de signe; ils commenceront pour $x = 1$, $\xi = 0$, par les valeurs $+1$, et le dernier radical finira pour $x = \frac{1}{k}$, $\xi = 1$, par la valeur: $+k$. Donc la valeur de cette intégrale sera K', et on aura:

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = K \pm iK',$$

où le signe du second terme sera $+$ ou $-$ suivant que le radical $\sqrt{1-x^2}$ finisse par: $-\frac{ik'}{k}$, ou par $+\frac{ik'}{k}$.

De là on trouve:

(2) $\sin \operatorname{am}(K \pm iK') = \frac{1}{k}$, $\cos \operatorname{am}(K \pm iK') = \mp \frac{ik'}{k}$, $\Delta \operatorname{am}(K \pm iK') = o$.

Si $k^2 > 0$, mais < 1, on peut admettre les deux signes; si $k^2 > 1$, il faut admettre seulement le signe inférieur; si $k^2 < 0$, il faut admettre seulement le signe supérieur; enfin si k^2 est une quantité imaginaire, $k = a + ib$, $k' = a' + ib'$, et $a'b - ab' > o$, il faut admettre seulement le signe inférieur, si $a'b - ab' < o$, il faut admettre seulement le signe supérieur.

Nous ferons voir plus tard que les équations (2) ont lieu pour des valeurs quelconques de k.

17. Le rapport des deux intégrales complètes K et K', ou, si l'une ou toutes les deux de ces intégrales sont imaginaires, la partie réelle de leur rapport, est toujours positive.

En effet, si k^2 est une quantité réelle, positive et plus petite que l'unité, K et K' seront toutes les deux des quantités réelles et positives, donc leur rapport sera une quantité réelle et positive.

Si k^2 est une quantité réelle et positive, mais plus grande que l'unité, $k = \frac{1}{l}$, où $l < 1$, on a suivant les équations (2) et (6) du **15**: $K = l(L + iL')$, $K' = lL'$, où L et L' sont des quantités réelles et positives. Donc la partie réelle du rapport $\frac{K}{K'}$, qui sera égale à $\frac{L}{L'}$, et celle du rapport $\frac{K'}{K}$, qui sera égale à $\frac{LL'}{L^2 + L'^2}$, sont positives.

Si k^2 est une quantité réelle, mais négative, $k^2 = -l^2$, où l^2 est une quantité positive, on a suivant les équations (3) et (7) du **15**:

$K = m'M$, $K' = m'(M' + iM)$, où $m = \frac{l}{\sqrt{1 + l^2}}$, $m' = \frac{1}{\sqrt{1 + l^2}}$, donc $m^2 > o$, et < 1, et par conséquent M et M' seront des quantités réelles et positives. Donc la partie réelle du rapport $\frac{K}{K'}$, qui sera égale à $\frac{MM'}{M^2 + M'^2}$, et celle du rapport $\frac{K'}{K}$, qui sera égale à $\frac{M'}{M}$, seront positives.

Enfin que k^2 soit une quantité imaginaire, $k = a + ib$, $k' = a' + ib'$, où a, b, a', b' sont des quantités réelles, a et a' positives, b et b' des signes opposés. Si l'on pose alors $kx = \xi$, $x = \frac{\xi}{k}$, on trouve:

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - k^2 x^2}} = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2} \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}.$$

En substituant ici $k = a + ib$, on trouvera:

$k^2 - \xi^2 = a^2 - b^2 - \xi^2 + 2iab = r(\cos p + i \sin p)$, où: $r \cdot \cos p = a^2 - b^2 - \xi^2$, $r \cdot \sin p = 2ab$, donc: $\sqrt{k^2 - \xi^2} = \sqrt{r}\,(\cos \frac{p}{2} + i \sin \frac{p}{2})$, $\frac{1}{\sqrt{k^2 - \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{r}}(\cos \frac{p}{2} - i \sin \frac{p}{2})$.

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{k^2 - \xi^2} \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} = \int_0^1 \frac{\cos \frac{p}{2} \cdot d\xi}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} - i \int_0^1 \frac{\sin \frac{p}{2} \cdot d\xi}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} = A'' + iB'',$$

où A'' et B'' sont des quantités réelles. Si maintenant on fait sur les signes des radicaux: $\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{k}\sqrt{k^2-\xi^2}$, et $\sqrt{1-k^2x^2} = \sqrt{1-\xi^2}$ les mêmes suppositions que dans le paragraphe précédent, et qu'on suppose de plus que non seulement la partie réelle, mais aussi le coefficient de i du premier radical, c'est à dire $\sqrt{r}.\cos\frac{p}{2}$ et $\sqrt{r}.\sin\frac{p}{2}$ ne changent pas de signe pendant l'intégration, A'' aura le même signe que $\cos\frac{p}{2}$, et B'' le signe opposé à $\sin\frac{p}{2}$.

Maintenant que b soit une quantité positive, donc b' une quantité négative. Alors $a'b - ab'$ sera une quantité positive et suivant **16** le radical $\sqrt{1-x^2}$, qui commence par la valeur $+1$, finira par la valeur: $+\frac{ik'}{k}$, et on aura:

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = K - iK',$$

ou, en vertu des équations (4) et (8) du **15**.

$A'' + iB'' = (A + iB) - i(A' + iB') = (A + B') + i(B - A')$. Donc on aura: $A'' = A + B'$, $B'' = B - A'$.

Alors le radical $\sqrt{k^2-\xi^2} = k\sqrt{1-x^2}$ commencera par la valeur: $k = a + ib$, et finira par la valeur: $ik' = -b' + ia'$; donc sa partie réelle et son coefficient de i commenceront et finiront par des valeurs positives, et, puisque nous avons supposé que le signe de la partie réelle et du coefficient de i du radical $\sqrt{1-x^2}$ ne change pas pendant l'intégration, elles resteront toujours positives. Mais $\sqrt{k^2-\xi^2} = \sqrt{r}(\cos\frac{p}{2} + i\sin\frac{p}{2})$, où $\sqrt{r}$ est une quantité positive; donc $\cos\frac{p}{2}$ et $\sin\frac{p}{2}$ resteront toujours positives. Donc enfin $A'' = A + B'$ sera une quantité positive et $B'' = B - A'$ une quantité négative.

Mais suivant **15** dans le cas que nous considérons, B sera une quantité positive et B' une quantité negative, A et A' étant toujours des quantités positives; donc on aura: $A > -B'$, et $A' > B$.

Si b est une quantité négative, par conséquent b' une quantité positive, alors $a'b - ab'$ sera une quantité négative, et suivant **16** le radical $\sqrt{1-x^2}$, qui commence par la valeur $+1$, finira par la valeur: $-\frac{ik'}{k}$. Alors on aura:

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = K + iK'$$

ou: $A'' + iB'' = (A + iB) + i(A' + iB') = (A - B') + i(A' + B)$, donc: $A'' = A - B'$, et $B'' = A' + B$.

Alors le radical $\sqrt{k^2-\xi^2} = k\sqrt{1-x^2}$ commencera par la valeur: $k = a + ib$, et finira par la valeur: $-ik' = b' - ia'$; donc sa partie réelle

commencera et finira par des valeurs positives, et le coefficient de i commencera et finira par des valeurs négatives, et puisque le signe de la partie réelle et du coefficient de i du radical $\sqrt{1-x^2}$ ne doit pas changer pendant l'intégration, la partie réelle du radical $\sqrt{k^2-\xi^2}$ restera toujours positive, et le coefficient de i toujours négatif. Donc cos $\frac{p}{2}$ restera toujours positif et sin $\frac{p}{2}$ toujours négatif, ou $A''=A-B'$ et $B''=A'+B$ seront toutes les deux des quantités positives.

Mais suivant **15** B sera dans ce cas une quantité négative et B' une quantité positive; donc enfin on aura: $A>B'$ et $A'>-B$.

Donc toujours A sera plus grande que la valeur numérique de B', et A' plus grande que la valeur numérique de B.

On a maintenant:

$$\frac{K}{K'}=\frac{A+iB}{A'+iB'}=\frac{AA'+BB'}{A'^2+B'^2}+i.\frac{A'B-AB'}{A'^2+B'^2},$$

$$\frac{K'}{K}=\frac{A'+iB'}{A+iB}=\frac{AA'+BB'}{A^2+B^2}+i.\frac{AB'-A'B}{A^2+B^2}.$$

Puisque B et B' ont toujours des signes contraires, BB' sera une quantité négative, et $AA'>-BB'$, ou: $AA'+BB'$ une quantité positive. Donc les parties réelles des rapports: $\frac{K}{K'}$ et $\frac{K'}{K}$ seront toujours positives.

On voit de plus que le coefficient de i du rapport $\frac{K}{K'}$ aura le même signe que b, c'est à dire que le coefficient de i dans la valeur du module k; et que le coefficient de i du rapport $\frac{K'}{K}$ aura le même signe que b', c'est à dire que le coefficient de i dans la valeur du module complémentaire k', ou le signe opposé au coefficient de i dans la valeur du module k.

Chapitre troisième.

Fonctions elliptiques d'arguments négatifs et imaginaires.

18. De l'équation: $u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}$ on trouve en changeant le signe de φ et de x:

$$\int_0^{-\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{-x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}=-\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=-\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}=-u.$$ Donc on aura:

$-\varphi=\text{am}(-u)$, $-x=\sin\text{am}(-u)$, $\sqrt{1-x^2}=\cos\text{am}(-u)$, $\sqrt{1-k^2x^2}=\Delta\,\text{am}(-u)$, et puisque

$\varphi=\text{am}\,u$, $x=\sin\text{am}\,u$, $\sqrt{1-x^2}=\cos\text{am}\,u$, $\sqrt{1-k^2x^2}=\Delta\,\text{am}\,u$, on aura les équations:

(1) $\mathrm{am}(-u) = -\mathrm{am}\,u$, $\sin\mathrm{am}(-u) = -\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}(-u) = \cos\mathrm{am}\,u$, $\Delta\mathrm{am}(-u) = \Delta\mathrm{am}\,u$. Donc quand l'argument change de signe, l'amplitude et le sinus de l'amplitude changeront de signe, tandis que le cosinus et le delta de l'amplitude resteront les mêmes.

19. De l'équation $u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}$ on trouve si l'on multiplie par $i = \sqrt{-1}$:

$$iu = i\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = -\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}.\sqrt{1-k^2x^2}},$$ où l'on suppose: $\sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{i}$ parceque pour $x = o$ on doit avoir $\sqrt{1-x^2} = +1$.

Si l'on compare la dernière intégrale avec l'équation (7) du **14**, dans laquelle on change ξ en $-x$, x en ξ, k' en k, et k en k', et dont la quatriéme intégrale particulière deviendra par conséquent: $-x = \pm\frac{i\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, on voit qu'à la limite $x = o$ correspond la limite $\xi = o$, et l'on aura donc par cette substitution:

$$iu = -\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}.\sqrt{1-k'^2\xi^2}}.$$

Si ici x et ξ tendent vers zéro, la première intégrale tendra vers: $-\frac{x}{i}$, et la seconde vers ξ; donc le rapport $\frac{x}{\xi}$ doit tendre vers: $-i$, donc enfin des deux signes de l'équation: $-x = \pm\frac{i\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ on doit choisir le supérieur: $-x = \frac{i\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$. De là on trouve:

$$\xi = \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}},\quad \sqrt{1-\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \sqrt{1-k'^2\xi^2} = \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

où les signes des radicaux sont déterminés par la condition que ξ et x s'évanouiront simultanément, et qu'alors ξ tendra vers $i\,x$, $\sqrt{1-\xi^2}$ et $\sqrt{1-k'^2\xi^2}$ vers $+1$.

De l'équation: $iu = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}.\sqrt{1-k'^2\xi^2}}$ on trouve:

$$\sin\mathrm{am}\,(iu, k') = \xi = \frac{ix}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{i\sin\mathrm{am}\,(u, k)}{\cos\mathrm{am}\,(u, k)},$$

$$\cos\mathrm{am}\,(iu, k') = \sqrt{1-\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\cos\mathrm{am}\,(u, k)},$$

$$\Delta\mathrm{am}\,(iu, k') = \sqrt{1-k'^2\xi^2} = \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\Delta\mathrm{am}\,(u, k)}{\cos\mathrm{am}(u, k)},$$

et de là, si l'on change k et k':

(1) $\sin am\,(iu,k) = \dfrac{i\sin am\,(u,k')}{\cos am\,(u,k')}$, $\cos am\,(iu,k) = \dfrac{1}{\cos am\,(u,k')}$,

$$\Delta am\,(iu,k) = \frac{\Delta am\,(u,k')}{\cos am\,(u,k')}.$$

20. Si dans les formules du **7** on pose iv au lieu de v, on aura les formules suivantes des fonctions elliptiques d'arguments complexes:

$$\sin am\,(u \pm iv) = \frac{\sin am\,u\,.\cos am\,(iv).\Delta am(iv) \pm \sin am(iv)\,.\cos am\,u\,.\Delta am\,u}{1 - k^2\sin^2 am\,u\,.\sin^2 am\,(iv)} =$$

$$= \frac{\sin am\,(u,k).\dfrac{\Delta am\,(v,k')}{\cos^2 am(v,k')} \pm i\,.\dfrac{\sin am\,(v,k')}{\cos am\,(v,k')}.\cos am\,(u,k)\,.\Delta am\,(u,k)}{1 + k^2\sin^2 am\,(u,k)\,.\dfrac{\sin^2 am\,(v,k')}{\cos^2 am\,(v,k')}} =$$

$$= \frac{\sin am\,(u,k).\Delta am\,(v,k') \pm i\sin am\,(v,k').\cos am\,(v,k').\cos am\,(u,k).\Delta am(u,k)}{\cos^2 am\,(v,k') + k^2\sin^2 am\,(u,k)\,.\sin^2 am\,(v.k')}$$

ou enfin, si l'on substitue $\cos^2 am\,(v,k') = 1 - \sin^2 am\,(v,k')$:

(1) $\sin am\,(u \pm i\,v,k) =$

$$= \frac{\sin am\,(u,k)\,.\Delta am\,(v,k') \pm i\cos am\,(u,k)\,.\Delta am\,(u,k).\sin am(v,k').\cos am(v,k')}{1 - \sin^2 am(v,k')\,.\Delta^2 am\,(u,k)}.$$

De même on aura:

$$\cos am\,(u \pm iv) = \frac{\cos am\,u.\cos am\,(iv) \mp \sin am\,u.\sin am\,(iv).\Delta am\,u\,.\Delta am\,(iv)}{1 - k^2\sin^2 am\,u\,.\sin^2 am\,(iv)} =$$

$$= \frac{\cos am\,(u,k).\dfrac{1}{\cos am\,(v,k')} \mp i\sin am\,(u,k).\dfrac{\sin am\,(v,k')}{\cos am(v,k')}.\Delta am\,(u,k).\dfrac{\Delta am(v,k')}{\cos am(v,k')}}{1 + k^2\sin^2 am\,(u,k).\dfrac{\sin^2 am\,(v,k')}{\cos^2 am\,(v,k')}},$$

ou:

(2) $\cos am\,(u \pm iv,k) =$

$$= \frac{\cos am\,(u,k)\,.\cos am\,(v,k') \mp i\sin am\,(u\,,k).\Delta am\,(u,k).\sin am\,(v,k').\Delta am(v,k')}{1 - \sin^2 am\,(v,k')\,.\Delta^2 am\,(u,k)}.$$

Enfin on aura:

$$\Delta am\,(u \pm iv) = \frac{\Delta am\,u\,.\Delta am\,(iv) \mp k^2\sin am\,u\,.\sin am(iv).\cos am\,u\,.\cos am\,(iv)}{1 - k^2\sin^2 am\,u\,.\sin^2 am\,(iv)} =$$

$$= \frac{\Delta am(u,k).\dfrac{\Delta am\,(v,k')}{\cos am\,(v,k')} \mp ik^2\sin am(u,k).\dfrac{\sin am\,(v,k')}{\cos am\,(v,k')}.\cos am(u,k).\dfrac{1}{\cos am\,(v,k')}}{1 + k^2\sin^2 am\,(u,k)\,.\dfrac{\sin^2 am\,(v,k')}{\cos^2 am\,(v,k')}}$$

ou:

(3) $\Delta am\,(u \pm i\,v,k) =$

$$= \frac{\Delta am(u,k).\Delta am(v,k').\cos am\,(v,k') \mp i\,k^2\sin am(u,k).\cos am(u,k).\sin am\,(v,k')}{1 - \sin^2 am\,(v,k').\Delta^2 am\,(u,k)}.$$

21. Si dans les formules (1), (2), (3) du paragraphe précédent on pose $u = K$, $v = K'$, et qu'on remarque que:

$$\sin\operatorname{am}(K,k)=1,\ \cos\operatorname{am}(K,k)=0,\ \Delta\operatorname{am}(K,k)=k',$$
$$\sin\operatorname{am}(K',k')=1,\ \cos\operatorname{am}(K',k')=0,\ \Delta\operatorname{am}(K',k')=k,$$

on trouvera:

$$(1)\quad \sin\operatorname{am}(K\pm iK')=\frac{k}{1-k'^2}=\frac{1}{k},\ \cos\operatorname{am}(K\pm iK')=\mp\frac{ik'k}{1-k'^2}=\mp\frac{ik'}{k},$$
$$\Delta\operatorname{am}(K\pm iK')=0,$$

ou les formules (2) du **16**, qui par conséquent ont lieu pour toute valeur du module k.

Chapitre quatrième.

Périodicité des fonctions elliptiques.

22. Si dans les formules du **7** on pose $v=K$, on aura: $\sin\operatorname{am} v=1$, $\cos\operatorname{am} v=0$, $\Delta\operatorname{am} v=k'$, et par conséquent: $1-k^2\sin^2\operatorname{am} u\,.\,\sin^2\operatorname{am} v=1-k^2\sin^2\operatorname{am} u=\Delta^2\operatorname{am} u$, et:

$$(1)\quad \sin\operatorname{am}(u\pm K)=\pm\frac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},\ \cos\operatorname{am}(u\pm K)=\mp k'.\frac{\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u},$$
$$\Delta\operatorname{am}(u\pm K)=\frac{k'}{\Delta\operatorname{am} u}.$$

Si l'on pose ici $u\pm K$ au lieu de u, on aura:

$$(2)\quad \begin{cases}\sin\operatorname{am}(u\pm 2K)=\pm\dfrac{\cos\operatorname{am}(u\pm K)}{\Delta\operatorname{am}(u\pm K)}=-\sin\operatorname{am} u,\\ \cos\operatorname{am}(u\pm 2K)=\mp k'.\dfrac{\sin\operatorname{am}(u\pm K)}{\Delta\operatorname{am}(u\pm K)}=-\cos\operatorname{am} u,\\ \Delta\operatorname{am}(u\pm 2K)=\dfrac{k'}{\Delta\operatorname{am}(u\pm K)}=\Delta\operatorname{am} u,\end{cases}$$

et si l'on pose successivement de nouveau $u\pm 2K$ au lieu de u, on aura en général:

$$(3)\quad \sin\operatorname{am}(u+2nK)=(-1)^n.\sin\operatorname{am} u,\ \cos\operatorname{am}(u+2nK)=(-1)^n.\cos\operatorname{am} u,$$
$$\Delta\operatorname{am}(u+2nK)=\Delta\operatorname{am} u,$$

où n désigne un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Si dans les formules du **7** on pose $v=K+iK'$, on aura: $\sin\operatorname{am} v=\frac{1}{k}$, $\cos\operatorname{am} v=-\frac{ik'}{k}$, $\Delta\operatorname{am} v=0$, par conséquent: $1-k^2\sin^2\operatorname{am} u\,.\,\sin^2\operatorname{am} v=1-\sin^2\operatorname{am} u=\cos^2\operatorname{am} u$, et:

$$(4)\quad \sin\operatorname{am}(u\pm(K+iK'))=\pm\frac{1}{k}.\frac{\Delta\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u},\ \cos\operatorname{am}(u\pm(K+iK'))=-\frac{ik'}{k}.\frac{1}{\cos\operatorname{am} u},$$
$$\Delta\operatorname{am}(u\pm(K+iK'))=\pm ik'.\frac{\sin\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} u}.$$

Si l'on pose ici $u\mp K$ au lieu de u, on aura en ayant égard aux formules (1):

$$(5)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u \pm iK') = \pm \dfrac{1}{k}\dfrac{\Delta\operatorname{am}(u \mp K)}{\cos\operatorname{am}(u \mp K)} = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{\sin\operatorname{am} u}, \\ \cos\operatorname{am}(u \pm iK') = -\dfrac{ik'}{k}\cdot\dfrac{1}{\cos\operatorname{am}(u \mp K)} = \mp\dfrac{i}{k}\cdot\dfrac{\Delta\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{am} u}, \\ \Delta\operatorname{am}(u \pm iK') = \pm ik'\cdot\dfrac{\sin\operatorname{am}(u \mp K)}{\cos\operatorname{am}(u \mp K)} = \mp i\cdot\dfrac{\cos\operatorname{am} u}{\sin\operatorname{am} u}. \end{cases}$$

Si l'on pose ici $u \pm iK'$ au lieu de u, on aura:

$$(6)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u \pm 2iK') = \dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{\sin\operatorname{am}(u \pm iK')} = \sin\operatorname{am} u, \\ \cos\operatorname{am}(u \pm 2iK') = \mp\dfrac{i}{k}\cdot\dfrac{\Delta\operatorname{am}(u \pm iK')}{\sin\operatorname{am}(u \pm iK')} = -\cos\operatorname{am} u, \\ \Delta\operatorname{am}(u \pm 2iK') = \mp i\cdot\dfrac{\cos\operatorname{am}(u \pm iK')}{\sin\operatorname{am}(u \pm iK')} = -\Delta\operatorname{am} u, \end{cases}$$

et si l'on pose successivement de nouveau $u \pm 2iK'$ au lieu de u, on aura en général:

(7) $\sin\operatorname{am}(u + 2miK') = \sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am}(u + 2miK') = (-1)^m\cdot\cos\operatorname{am} u$,

$$\Delta\operatorname{am}(u + 2miK') = (-1)^m\,\Delta\operatorname{am} u,$$

où m désigne un nombre entier quelconque positif ou négatif.

Si dans ces formules on pose $u + 2nK$ au lieu de u, on trouvera enfin en ayant égard aux formules (3) les formules plus générales:

$$(8)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u + 2nK + 2miK') = (-1)^n \sin\operatorname{am} u, \\ \cos\operatorname{am}(u + 2nK + 2miK') = (-1)^{n+m}\cos\operatorname{am} u, \\ \Delta\operatorname{am}(u + 2nK + 2miK') = (-1)^m\,\Delta\operatorname{am} u. \end{cases}$$

Il résulte de ces formules que les fonctions elliptiques sont des fonctions doublement périodiques. Les indices de périodicité sont pour la première fonction, $\sin\operatorname{am} u$: $4K$ et $2iK'$; pour la seconde fonction, $\cos\operatorname{am} u$: $4K$ et $4iK'$; pour la troisième fonction, $\Delta\operatorname{am} u$: $2K$ et $4iK'$.

Les valeurs numériques des trois fonctions sont doublement périodiques avec les indices $2K$ et $2iK'$.

Suivant **17** la partie réelle du rapport $\frac{K}{K'}$ est toujours plus grande que zéro; donc le rapport des deux indices, $2K$ et $2iK'$, sera toujours une quantité imaginaire. Les valeurs de l'une des périodes ne peuvent donc jamais coïncider avec celles de l'autre, ou la périodicité sera toujours double.

23. On peut facilement déduire la double périodicité des fonctions elliptiques directement de leurs definitions. En effet elle dépend des valeurs multiples qu'acquiert l'intégrale elliptique selon la route que suit la variable indépendante depuis zéro jusqu'à la limite supérieure de l'intégrale, et du signe qu'on donne pendant la marche de la variable aux radicaux du dénominateur. Dans le calcul d'une intégrale définie, dont la dérivée peut

avoir plusieurs valeurs différentes, il faut toujours maintenir la continuité de ces valeurs de manière que, si l'on a commencé par une quelconque de ces valeurs, on la suit jusqu'à ce qu'on arrive à une valeur de la variable indépendante, pour laquelle les valeurs doubles ou multiples de la dérivée coïncident. A ce point on est à liberté de choisir l'une ou l'autre de ces valeurs, ce qu'en général donne des valeurs différentes à l'intégrale.

Ainsi dans l'intégrale elliptique:

$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}$, la dérivée: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}$ a deux valeurs différentes, l'une positive et l'autre négative, qui coïncident pour $x = \pm 1$, et $x = \pm \frac{1}{k}$.

A ces limites on peut donc changer le signe du radical: $\sqrt{1-x^2}$ ou de $\sqrt{1-k^2x^2}$, et l'intégrale aura des valeurs différentes suivant qu'en passant par les valeurs $x = \pm 1$, ou $x = \pm \frac{1}{k}$, on change une ou plusieurs fois le signe des radicaux. On remarque ici, que nous avons supposé, que pour la limite inférieure de l'intégration, $x = o$, les radicaux commencent toujours par la valeur positive $+ 1$. Désignons maintenant par u la valeur de l'intégrale définie $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^x \frac{dx}{yz}$, où x varie d'une manière quelconque depuis o jusqu'à x, où les radicaux $y = \sqrt{1-x^2}$ et $z = \sqrt{1-k^2x^2}$, qui tous les deux commencent par les valeurs positives $+ 1$, changent leurs signes un nombre quelconque de fois, et où l'on désignera par $+\sqrt{1-x^2}$ et $+\sqrt{1-k^2x^2}$ les valeurs qu'ils auront à la fin de l'intégration. On aura alors:

(1) $x = \sin am\, u$, $y = +\sqrt{1-x^2} = \cos am\, u$, $z = +\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am\, u$.

Que v soit la valeur de la même intégrale, dans laquelle x en commençant par la valeur $x = o$ passe de là à la valeur $x = +1$, puis retourne de là à la valeur $x = o$, puis de là à la valeur x; qu'on suppose que pendant la première partie de l'intégration, depuis $x = o$ jusqu'à $x = +1$, les radicaux $y = \sqrt{1-x^2}$ et $z = \sqrt{1-k^2x^2}$ ne changent pas leurs signes, et que $z = \sqrt{1-k^2x^2}$ pour $x = +1$ ait la valeur: $+ k'$; que de plus on suppose qu'à cette limite le radical $y = \sqrt{1-x^2}$ change le signe, tandisque l'autre radical $z = \sqrt{1-k^2x^2}$ continue de garder le même signe, enfin que pendant la dernière partie de l'intégration depuis $x = o$ jusqu'à $x = x$, la variable indépendante x varie de la même manière que dans l'intégrale u et que le radical $y = \sqrt{1-x^2}$ ait le signe contraire, et le radical $z = \sqrt{1-k^2x^2}$ le même signe que dans l'intégrale u. Alors on aura:

$$v = \int_0^1 \frac{dx}{+y.+z} + \int_1^0 \frac{dx}{-y.+z} + \int_0^x \frac{dx}{-y.+z} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{+y.+z} - \int_1^0 \frac{dx}{+y.+z} - \int_0^x \frac{dx}{+y.+z} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{+y.+z} + \int_0^1 \frac{dx}{+y.+z} - \int_0^x \frac{dx}{+y.+z} = 2K - u,$$

et de plus:

$x = \sin am\, v, \; -y = -\sqrt{1-x^2} = \cos am\, v, \; +z = +\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am\, v.$

En comparant ces équations avec les équations précédentes (1) et en substituant la valeur: $v = 2K - u$, on aura:

$\sin am(2K-u) = \sin am\, u, \cos am(2K-u) = -\cos am\, u, \Delta am(2K-u) = \Delta am\, u.$

Si l'on change ici le signe de l'argument u, et si l'on substitue $u - 2K$ au lieu de u, on aura les formules (2) du **22**:

(2) $\sin am(u \pm 2K) = -\sin am\, u, \cos am(u \pm 2K) = -\cos am\, u, \Delta am(u \pm 2K) = \Delta am\, u,$

lesquelles formules représentent la première périodicité des fonctions elliptiques.

De même si l'on désigne par v la valeur de l'intégrale elliptique, dans laquelle la variable x passe de la valeur $x = 0$ jusqu'à la valeur $x = +1$, que dans cet intervalle de l'intégration les radicaux $y = \sqrt{1-x^2}$ et $z = \sqrt{1-k^2x^2}$, qui commencent par les valeurs positives $+1$, ne changent pas les signes, et que le radical z finit pour $x = 1$ par la valeur $+k'$, qu'à cette limite, pour laquelle $y = \sqrt{1-x^2} = 0$, on change le signe de ce radical et fasse passer la variable x depuis la valeur $x = +1$ à la valeur $x = +\frac{1}{k}$, sans que dans cet intervalle les radicaux y et z changent de signes, qu'à la limite $x = +\frac{1}{k}$, pour laquelle $z = \sqrt{1-k^2x^2} = 0$, on change le signe de ce radical, qu'on retourne de là depuis $x = +\frac{1}{k}$ à $x = 0$ sans changer les signes des radicaux qui alors pour $x = 0$ auront la valeur: -1, qu'enfin on fasse passer la variable depuis $x = 0$ jusqu'à $x = x$ de la même manière que dans l'intégrale u et que les radicaux y et z aient tous les deux les signes opposés à ceux qu'ils auraient dans l'intégrale u; alors on aura:

$$v = \int_0^1 \frac{dx}{+y.+z} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{-y.+z} + \int_{\frac{1}{k}}^0 \frac{dx}{-y.-z} + \int_0^x \frac{dx}{-y.-z} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{+y.+z} - \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{+y.+z} + \int_{\frac{1}{k}}^0 \frac{dx}{+y.+z} + \int_0^x \frac{dx}{+y.+z} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{+y.+z} - \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{+y.+z} - \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{+y.+z} + \int_0^x \frac{dx}{+y.+z} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dx}{+y.+z} - 2\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{+y.+z} + \int_0^x \frac{dx}{+y.+z} =$$

$$= 2K - 2(K \pm iK') + u = u \mp 2iK',$$

où le signe supérieur aura lieu, si pour $x = \frac{1}{k}$ on suppose $y = \sqrt{1-x^2} = -\frac{ik'}{k}$, le signe inférieur, si pour $x = \frac{1}{k}$ on suppose $y = +\frac{ik'}{k}$.

De plus on aura:

$x = \sin am\, v$, $-y = -\sqrt{1-x^2} = \cos am\, v$, $-z = -\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am\, v$.

En comparant ces équations avec les équations précédentes (1) et en substituant la valeur: $v = u \mp 2iK'$, on trouvera les formules (6) du **22**:

(3) $\sin am(u \pm 2iK') = \sin am\, u$, $\cos am(u \pm 2iK') = -\cos am\, u$, $\Delta am(u \pm 2iK') = -\Delta am\, u$, lesquelles formules représentent la seconde périodicité des fonctions elliptiques.

Enfin si l'on désigne par v la valeur de l'intégrale elliptique, dans laquelle la variable y passe de la valeur $x = o$ à la valeur $x = +\frac{1}{k}$, que dans cet intervalle les radicaux y et z ne changent pas de signes, et que pour $x = 1$ on ait $z = +k'$, qu'à la limite $x = \frac{1}{k}$, pour laquelle $z = \sqrt{1-k^2x^2} = o$, on change le signe de ce radical, qu'on retourne de là depuis $x = +\frac{1}{k}$ jusqu'à $x = o$ sans changer les signes des radicaux, qu'enfin on fasse passer la variable depuis $x = o$ jusqu'à $x = x$ de la même manière que dans l'intégrale u, et que le radical y ait le même signe, le radical z le signe opposé à celui, qu'il aurait dans l'intégrale u; alors on aura:

$$v = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{+y.+z} + \int_{\frac{1}{k}}^{o} \frac{dx}{+y.-z} + \int_o^x \frac{dx}{+y.-z} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{+y.+z} - \int_{\frac{1}{k}}^{o} \frac{dx}{+y.+z} - \int_o^x \frac{dx}{+y.+z} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{+y.+z} + \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{+y.+z} - \int_o^x \frac{dx}{+y.+z} =$$

$$= 2(K \pm iK') - u,$$

où le signe supérieur aura lieu, si pour $x = \frac{1}{k}$ on suppose $y = -\frac{ik'}{k}$, le signe inférieur, si pour $x = \frac{1}{k}$ on suppose $y = +\frac{ik'}{k}$.

De plus on aura:

$x = \sin am\, v$, $+y = +\sqrt{1-x^2} = \cos am\, v$, $-z = -\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am\, v$.

En comparant ces équations avec les équations précédentes (1) et en substituant la valeur: $v = 2(K \pm iK') - u$, on aura:

$\sin am(2K \pm 2iK' - u) = \sin am\, u$, $\cos am(2K \pm 2iK' - u) = \cos am\, u$,

$\Delta am(2K \pm 2iK' - u) = -\Delta am\, u$.

Si l'on change ici le signe de l'argument u, on aura:

$$(4)\quad \sin am(u + 2K \pm 2iK') = -\sin am\, u,\ \cos am(u + 2K \pm 2iK') = \cos am\, u,$$
$$\Delta am(u + 2K \pm 2iK') = -\Delta am\, u.$$

Si l'on avait changé le signe du radical $y = \sqrt{1-x^2}$ à la limite $x = -1$, ou le signe du radical $z = \sqrt{1-k^2x^2}$ à la limite $x = -\frac{1}{k}$, on aurait eu les mêmes formules avec les signes contraires de K et de K'.

24. Des formules (8) du **22** et (1) du **18** on tire les valeurs différentes de l'argument u, dont les fonctions elliptiques ont la même valeur numérique avec le même signe ou avec le signe contraire. En effet en ayant égard aux formules (1) du **18**: $\sin am(-u) = -\sin am\, u$, $\cos am(-u) = \cos am\, u$, $\Delta am(-u) = \Delta am\, u$, on peut mettre les formules (8) du **22** sous la forme plus générale:

$$(1)\quad \begin{cases} \sin am(2nK + 2miK' \pm u) = \pm(-1)^n \sin am\, u, \\ \cos am(2nK + 2miK' \pm u) = (-1)^{n+m} \cos am\, u, \\ \Delta am(2nK + 2miK' \pm u) = (-1)^m \Delta am\, u. \end{cases}$$

Si dans la première de ces équations n est un nombre pair, le membre droit de l'équation aura le même signe que u dans l'argument du membre gauche de l'équation, si n est un nombre impair, il aura le signe contraire. Si dans la seconde équation n + m est un nombre pair, le membre droit de cette équation deviendra toujours: + cos am u; si n + m est un nombre impair, il deviendra: − cos am u. Enfin si dans la troisième équation m est un nombre pair, le membre droit de cette équation deviendra: + Δ am u; si m est un nombre impair il deviendra: − Δ am u.

Tous ces cas sont exprimés par les équations suivantes:

$$(2)\quad \begin{cases} \sin am(2nK + 2miK' + (-1)^n u) = +\sin am\, u, \\ \sin am(2nK + 2miK' - (-1)^n u) = -\sin am\, u, \\ \cos am(2(2n + m)K + 2miK' \pm u) = +\cos am\, u, \\ \cos am(2(2n+m+1)K + 2miK' \pm u) = -\cos am\, u, \\ \Delta am(2nK + 4miK' \pm u) = +\Delta am\, u, \\ \Delta am(2nK + 2(2m+1)iK' \pm u) = -\Delta am\, u, \end{cases}$$

où n et m sont des nombres entiers quelconques. On aura donc les solutions suivantes:

$$(3)\quad \begin{cases} \sin am\, v = \sin am\, u,\ v = 2nK + 2miK' + (-1)^n u, \\ \sin am\, v = -\sin am\, u,\ v = 2nK + 2miK' - (-1)^n u, \\ \cos am\, v = \cos am\, u,\ v = 2(2n + m)K + 2miK' \pm u, \\ \cos am\, v = -\cos am\, u,\ v = 2(2n + m + 1)K + 2miK' \pm u, \\ \Delta am\, v = \Delta am\, u,\ v = 2nK + 4miK' \pm u, \\ \Delta am\, v = -\Delta am\, u,\ v = 2nK + 2(2m + 1)iK' \pm u. \end{cases}$$

Or ces solutions sont les plus générales qu'on peut avoir, ou elles donnent toutes les valeurs de v, qui satisfont aux équations correspondantes.

En effet dans le paragraphe précédent nous avons trouvé que si l'on désigne par u une quelconque des valeurs de l'intégrale elliptique, en changeant le signe du radical $\sqrt{1-x^2}$ aux limites $x = \pm 1$, et le signe du radical $\sqrt{1-k^2x^2}$ aux limites $x = \pm \frac{1}{k}$, on aura les valeurs nouvelles de la même intégrale elliptique: $v = \pm 2K - u$, $v = \pm 2iK' + u$, $v = \pm 2K \pm 2iK' - u$, où les deux signes doubles $\pm$ sont indépendants l'un de l'autre. Si l'on répète ces changements de signes un nombre quelconque de fois, on aura l'expression *la plus générale* des valeurs multiples de l'intégrale elliptique $v = 2nK + 2miK' + (-1)^n u$, où n et m désignent des nombres entiers quelconques.

Il suit de là que, si $\sin am\, v = \sin am\, u$, on aura nécessairement: $v = 2nK + 2miK' + (-1)^n u$.

Si l'on change ici le signe de u, on trouve que si $\sin am\, v = -\sin am\, u$, on aura: $v = 2nK + 2miK' - (-1)^n u$.

De là il suit qu'à l'équation: $\sin^2 am\, v = \sin^2 am\, u$, donc aussi aux équations: $\cos^2 am\, v = \cos^2 am\, u$ et $\Delta^2 am\, v = \Delta^2 am\, u$, correspondent les valeurs: $v = 2nK + 2miK' \pm u$.

De là on trouve enfin les équations précédentes (2) en ayant égard aux équations (8) du **22**.

25. Pour trouver tous les arguments pour lesquels les fonctions elliptiques disparaissent ou deviennent infinies, il faut seulement en connaître un; les équations du paragraphe précédent donneront alors tous les autres.

Or on a: $\sin am(0) = 0$, $\cos am(K) = 0$, $\Delta am(K + iK') = 0$, donc en vertu des équations du paragraphe précédent les arguments qui satisfont aux équations suivantes seront tous de la forme ci-jointe:

$$\begin{aligned} &\sin am\, v = 0, \quad v = 2nK + 2miK' \\ (1)\qquad &\cos am\, v = 0, \quad v = (2n+1)K + 2miK' \\ &\Delta am\, v = 0, \quad v = (2n+1)K + (2m+1)iK'. \end{aligned}$$

Si dans les équations (5) du **22** on pose $u = 0$, on trouvera: $\sin am(iK') = \infty$, $\cos am(iK') = \infty$, $\Delta am(iK') = \infty$. Donc si l'on substitue dans les formules du paragraphe précédent $u = iK'$, on trouvera que les arguments qui satisfont aux équations:

$$\sin am\, v = \infty, \quad \cos am\, v = \infty, \quad \Delta am\, v = \infty,$$

sont tous de la forme:

$$(2)\qquad v = 2nK + (2m+1)iK'.$$

Chapitre cinquième.

Fonctions elliptiques des multiples de l'argument.

26. Des formules des paragraphes **7** et **10** sur les fonctions elliptiques d'une somme de deux arguments on déduit les formules des fonctions de multiples d'arguments, sin am (pu), cos am (pu), Δ am (pu), où p est un nombre entier, en fonctions de sin am u, cos am u, et Δ am u.

Si dans les formules (7), (8) et (9) du **10**:

$$\sin\mathrm{am}(u+v).\sin\mathrm{am}(u-v)=\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u.\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

$$\cos\mathrm{am}(u+v).\cos\mathrm{am}(u-v)=\frac{\frac{1}{k^2}(\Delta^2\mathrm{am}\,u.\Delta^2\mathrm{am}\,v-k'^2)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u.\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

$$\Delta\mathrm{am}(u+v).\Delta\mathrm{am}(u-v)=\frac{k'^2+k^2\cos^2\mathrm{am}\,u.\cos^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u.\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

on pose (p + 1) u au lieu de u et pu au lieu de v, on aura (2p + 1) u au lieu de u + v et u au lieu de u − v, et on aura donc les formules:

$$(1)\quad\begin{cases}\sin\mathrm{am}((2p+1)u).\sin\mathrm{am}\,u=\dfrac{\sin^2\mathrm{am}\,((p+1)u)-\sin^2\mathrm{am}(pu)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,((p+1)u).\sin^2\mathrm{am}(pu)},\\[2ex]\cos\mathrm{am}((2p+1)u).\cos\mathrm{am}\,u=\dfrac{\frac{1}{k^2}(\Delta^2\mathrm{am}((p+1)u).\Delta^2\mathrm{am}(pu)-k'^2)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}((p+1)u).\sin^2\mathrm{am}(pu)},\\[2ex]\Delta\mathrm{am}((2p+1)u).\Delta\mathrm{am}\,u=\dfrac{k'^2+k^2\cos^2\mathrm{am}((p+1)u).\cos^2\mathrm{am}(pu)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}((p+1)u).\sin^2\mathrm{am}(pu)}.\end{cases}$$

Si dans les formules (1) du **7** on pose pu au lieu de u et v, ou dans les formules (1), (2) et (3) du **11** pu au lieu de u, on aura les formules:

$$(2)\quad\begin{cases}\sin\mathrm{am}(2pu)=\dfrac{2\sin\mathrm{am}(pu).\cos\mathrm{am}(pu).\Delta\mathrm{am}(pu)}{1-k^2\sin^4\mathrm{am}(pu)},\\[2ex]\cos\mathrm{am}(2pu)=\dfrac{\cos^2\mathrm{am}(pu)-\sin^2\mathrm{am}(pu).\Delta^2\mathrm{am}(pu)}{1-k^2\sin^4\mathrm{am}(pu)},\\[2ex]\Delta\mathrm{am}(2pu)=\dfrac{\Delta^2\mathrm{am}(pu)-k^2\sin^2\mathrm{am}(pu).\cos^2\mathrm{am}(pu)}{1-k^2\sin^4\mathrm{am}(pu)}.\end{cases}$$

Si dans ces six formules on pose maintenant successivement p = 1, = 2, = 3, ... et qu'on substitue les valeurs ainsi trouvées, on aura successivement les fonctions elliptiques des arguments 2u, 3u, 4u, . . . exprimées en fractions rationelles de sin am u, cos am u et Δ am u.

D'abord il résulte immédiatement des formules précédentes que les dénominateurs des trois fractions rationelles par lesquelles les trois fonctions elliptiques: sin am (pu), cos am (pu) et Δ am (pu) sont exprimées en fractions rationelles de sin am u, cos am u et Δ am u, seront toujours les mêmes. On peut donc supposer:

$$\sin am(pu) = \frac{P_p}{Q_p}, \quad \cos am(pu) = \frac{P'_p}{Q_p}, \quad \Delta am(pu) = \frac{P''_p}{Q_p},$$

où P_p, P'_p, P''_p, Q_p sont des fonctions entières de $x = \sin am\, u$, $y = \cos am\, u$, $z = \Delta am\, u$. En substituant dans les formules (1) et (2) on en tire:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{P_{2p+1}\cdot x}{Q_{2p+1}} = \dfrac{P^2_{p+1}\cdot Q^2_p - P^2_p\cdot Q^2_{p+1}}{Q^2_{p+1}\cdot Q^2_p - k^2 P^2_{p+1}\cdot P^2_p}, \\ \dfrac{P'_{2p+1}\cdot y}{Q_{2p+1}} = \dfrac{\frac{1}{k^2}(P''^2_{p+1}\cdot P''^2_p - k'^2 Q^2_{p+1}\cdot Q^2_p)}{Q^2_{p+1}\cdot Q^2_p - k^2 P^2_{p+1}\cdot P^2_p}, \\ \dfrac{P''_{2p+1}\cdot z}{Q_{2p+1}} = \dfrac{k'^2 Q^2_{p+1}\cdot Q^2_p + k^2 P'^2_{p+1}\cdot P'^2_p}{Q^2_{p+1}\cdot Q^2_p - k^2 P^2_{p+1}\cdot P^2_p}. \end{cases}$$

$$(4)\quad \frac{P_{2p}}{Q_{2p}} = \frac{2P_p\cdot P'_p\cdot P''_p\cdot Q_p}{Q^4_p - k^2 P^4_p}, \quad \frac{P'_{2p}}{Q_{2p}} = \frac{P'^2_p\cdot Q^2_p - P^2_p\cdot P''^2_p}{Q^4_p - k^2 P^4_p}, \quad \frac{P''_{2p}}{Q_{2p}} = \frac{P''^2_p\cdot Q^2_p - k^2 P^2_p\cdot P'^2_p}{Q^4_p - k^2 P^4_p}.$$

Les fractions du second membre de ces six équations sont réduites à leur plus simples expressions. En effet si cela n'avait pas lieu, c'est à dire, si les numérateurs et dénominateurs avaient un facteur commun, il faudrait que les numérateurs et dénominateurs s'évanouissent en même temps.

Or, en considérant la première des formules (3), il est impossible qu'en même temps:

$$P^2_{p+1}\cdot Q^2_p - P^2_p\cdot Q^2_{p+1} = 0, \text{ et } Q^2_{p+1}\cdot Q^2_p - k^2 P^2_{p+1}\cdot P^2_p = 0.$$

En effet de ces équations on trouvera en divisant par $Q^2_{p+1}\cdot Q^2_p$:
$\sin^2 am((p+1)u) - \sin^2 am(pu) = 0$, $1 - k^2 \sin^2 am((p+1)u)\cdot \sin^2 am(pu) = 0$, ou, si l'on fait pour abréger: $\sin am((p+1)u) = x_1$, $\sin am(pu) = x_2$:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \quad 1 - k^2 x_1^2\cdot x_2^2 = 0,$$

desquelles on tire: $x_1^2 = x_2^2 = \pm\frac{1}{k}$.

Maintenant on a suivant la formule (2) du **6**:

$$\sin am\, u = \sin am((p+1)u - pu) = \xi' = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1} = \frac{x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2}.$$

Ici $\sin am\, u$ ne peut être ni zéro, ni infini, car alors $x_1 = \sin am((p+1)u)$ et $x_2 = \sin am(pu)$ deviendront suivant **25** aussi ou zéro ou infinies, ce qui est contraire à la condition $x_1^2 = x_2^2 = \pm\frac{1}{k}$. Donc, puisque dans la première fraction le numérateur, et dans la seconde le dénominateur disparaît, il faut que le dénominateur de la première fraction, et le numérateur de la seconde disparaissent en même temps, ou qu'on ait simultanément:
$x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_1 = 0$, et $x_1 y_2 z_2 - x_2 y_1 z_1 = 0$, desquelles on tire: $x_1 y_2 z_2 = 0$, $x_2 y_1 z_1 = 0$. Si l'on élève au carré une quelconque de ces deux équations, et qu'on y substitue les valeurs: $x_1^2 = x_2^2 = \pm\frac{1}{k}$, desquelles on tire: $y_1^2 = y_2^2 = 1 \mp \frac{1}{k}$, $z_1^2 = z_2^2 = 1 \mp k$, on aura:

$$x_1^2 y_2^2 z_2^2 = \pm\frac{1}{k}(1 \mp \frac{1}{k})(1 \mp k) = 0,$$

équation impossible. Donc on ne peut pas avoir en même temps: $x_1^2 - x_2^2 = o$ et $1 - k^2x_1^2x_2^2 = o$, ou: $P_{p+1}^2 Q_p^2 - P_p^2 . Q_{p+1}^2 = o$, et $Q_{p+1}^2 Q_p^2 - k^2 P_{p+1}^2 . P_p^2 = o$.

Donc enfin le second membre de la première des équations (3) est réduit à sa plus simple forme.

De même si le second membre de la seconde équation (3) n'était pas réduit à sa plus simple forme, il faudrait que pour la même valeur de u le numérateur et le dénominateur disparussent, ou qu'on eût en même temps:

$$\frac{1}{k^2}(P''^2_{p+1} . P''^2_p - k'^2 Q_{p+1}^2 . Q_p^2) = o, \quad Q_{p+1}^2 . Q_p^2 - k^2 P_{p+1}^2 . P_p^2 = o.$$

De là on trouve en divisant par $Q_{p+1}^2 . Q_p^2$:

$\frac{1}{k^2}(z_1^2 z_2^2 - k'^2) = o$, $1 - k^2x_1^2x_2^2 = o$, ou: $z_1^2 z_2^2 = k'^2$, $x_1^2 x_2^2 = \frac{1}{k^2}$.

Maintenant on a suivant la formule (3) du **6**:

$$\cos am\, u = \cos am((p+1)u - pu) = \eta' = \frac{y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2}{1 - k^2x_1^2x_2^2} = \frac{\frac{1}{k^2}(z_1^2z_2^2 - k'^2)}{y_1y_2 - x_1x_2z_1z_2}.$$

Ici cos am u ne peut être ni zéro ni infini. Car dans le premier cas $x_1^2 = \sin^2 am\ ((p+1)u)$ et $x_2^2 = \sin^2 am\,(pu)$ deviennent suivant **25** l'un égal à zéro, l'autre à l'unité, et l'équation: $1 - k^2 x_1^2 x_2^2 = o$ n'aura pas alors lieu; et dans le second cas $z_1^2 = \Delta^2 am\ ((p+1)u)$ et $z_2^2 = \Delta^2 am\,(pu)$ deviennent l'un infini, l'autre égal à l'unité, et l'équation: $\frac{1}{k^2}(z_1^2z_2^2 - k'^2) = o$ n'aura pas alors lieu. Donc des équations: $1 - k^2x_1^2x_2^2 = o$ et $\frac{1}{k^2}(z_1^2z_2^2 - k'^2) = o$ on déduit les équations: $y_1y_2 + x_1x_2z_1z_2 = o$ et $y_1y_2 - x_1x_2z_1z_2 = o$, et de là: $y_1y_2 = o$, $x_1x_2z_1z_2 = o$. Si l'on élève la dernière formule au carré et qu'on y substitue les valeurs: $x_1^2x_2^2 = \frac{1}{k^2}$, $z_1^2z_2^2 = k'^2$, on aura: $\frac{1}{k^2} . k'^2 = \frac{1}{k^2}(1 - k^2) = o$, équation impossible. Donc on ne peut pas avoir en même temps $\frac{1}{k^2}(z_1^2z_2^2 - k'^2) = o$ et $1 - k^2x_1^2x_2^2 = o$, ou: $\frac{1}{k^2}(P''^2_{p+1} . P''^2_p - k'^2 Q_{p+1}^2 . Q_p^2) = o$, et $Q_{p+1}^2 . Q_p^2 - k^2 P_{p+1}^2 . P_p^2 = o$.

De même si le second membre de la troisième équation (3) n'était pas réduit à sa plus simple forme, il faudrait que pour la même valeur de u le numérateur et le dénominateur disparussent, ou qu'on eût en même temps

$$k'^2 Q_{p+1}^2 . Q_p^2 + k^2 P'^2_{p+1} . P'^2_p = o, \quad Q_{p+1}^2 . Q_p^2 - k^2 P_{p+1}^2 . P_p^2 = o.$$

De là on trouve en divisant par $Q_p^2 . Q_{p+1}^2$:

$k'^2 + k^2 y_1^2 y_2^2 = o$, $1 - k^2x_1^2x_2^2 = o$, ou: $y_1^2 y_2^2 = -\frac{k'^2}{k^2}$, $x_1^2 x_2^2 = \frac{1}{k^2}$.

Maintenant on a suivant la formule (4) du **6**:

$$\Delta am\, u = \Delta am((p+1)u - pu) = \zeta' = \frac{z_1z_2 + k^2x_1x_2y_1y_2}{1 - k^2x_1^2x_2^2} = \frac{k'^2 + k^2y_1^2y_2^2}{z_1z_2 - k^2x_1x_2y_1y_2}.$$

Ici $\Delta am\, u$ ne peut pas être ni zéro ni infini. Car dans le premier cas $x_1^2 = \sin^2 am\ ((p+1)u)$ et $x_2^2 = \sin^2 am\,(pu)$ deviennent suivant **25** l'un zéro, l'autre égal à $\frac{1}{k^2}$, et l'équation $1 - k^2x_1^2x_2^2 = o$ n'aura pas alors

lieu; et dans le second cas $y_1^2 = \cos^2 \text{am}((p+1)u)$ et $y_2^2 = \cos^2 \text{am}(pu)$ deviennent l'un égal à l'unité, l'autre infini, et l'équation $k'^2 + k^2 y_1^2 y_2^2 = 0$ n'aura pas alors lieu. Donc des équations: $1 - k^2 x_1^2 x_2^2 = 0$, et $k'^2 + k^2 y_1^2 y_2^2 = 0$, on déduit les équations: $z_1 z_2 + k^2 x_1 x_2 y_1 y_2 = 0$, et $z_1 z_2 - k^2 x_1 x_2 y_1 y_2 = 0$, et de là: $z_1 z_2 = 0$, $x_1 x_2 y_1 y_2 = 0$. Si l'on élève la dernière de ces équations au carré, et qu'on y substitue les valeurs: $x_1^2 x_2^2 = \frac{1}{k^2}$, $y_1^2 y_2^2 = -\frac{k'^2}{k^2}$ on aura: $-\frac{k'^2}{k^4} = \frac{k^2-1}{k^4} = 0$, équation impossible. Donc on ne peut pas avoir en même temps: $k'^2 + k^2 y_1^2 y_2^2 = 0$, et $1 - k^2 x_1^2 x_2^2 = 0$, ou: $k'^2 Q_{p+1}^2 . Q_p^2 + k^2 P'^2_{p+1} . P'^2_p = 0$, et $Q_{p+1}^2 . Q_p^2 - k^2 P_{p+1}^2 . P_p^2 = 0$.

Considérons maintenant le second membre de la première des équations (4). S'il n'était pas réduit à sa plus simple forme, il faudrait que pour la même valeur de u on eût:

$$P_p . P'_p . P''_p . Q_p = 0, \quad Q_p^4 - k^2 P_p^4 = 0,$$

et de là en divisant par Q_p^4:

$$\sin \text{am}(pu) . \cos \text{am}(pu) . \Delta \text{am}(pu) = 0, \quad 1 - k^2 \sin^4 \text{am}(pu) = 0.$$

La dernière de ces équations donne: $\sin^2 \text{am}(pu) = \pm \frac{1}{k}$, et de là $\cos^2 \text{am}(pu) = 1 \mp \frac{1}{k}$, $\Delta^2 \text{am}(pu) = 1 \mp k$. Ces valeurs substituées dans la première équation élevée au carré donneront: $\pm \frac{1}{k}(1 \mp \frac{1}{k})(1 \mp k) = 0$, équation impossible. Donc le second membre de la première des équations (4) est réduit à sa plus simple forme.

Considérons la seconde de ces équations. Si son second membre n'était pas réduit à sa plus simple forme, il faudrait qu'on eût pour une même valeur de u: $P'^2_p . Q_p^2 - P_p^2 . P''^2_p$, et $Q_p^4 - k^2 P_p^4 = 0$,

et de là en divisant par Q_p^4:

$$\cos^2 \text{am}(pu) - \sin^2 \text{am}(pu) . \Delta^2 \text{am}(pu) = 0, \quad 1 - k^2 \sin^4 \text{am}(pu) = 0.$$

La dernière de ces équations donne: $\sin^2 \text{am}(pu) = \pm \frac{1}{k}$, et de là: $\cos^2 \text{am}(pu) = 1 \mp \frac{1}{k}$, $\Delta^2 \text{am}(pu) = 1 \mp k$. Ces valeurs substituées dans la première équation donneront: $1 \mp \frac{1}{k} \mp \frac{1}{k}(1 \mp k) = 2(1 \mp \frac{1}{k}) = 0$, équation impossible. Donc le second membre de la seconde des équations (4) est réduit à sa plus simple forme.

Considérons enfin la dernière de ces équations. Si son second membre n'était pas réduit à sa plus simple forme, il faudrait que pour une même valeur de u on eût:

$$P''^2_p . Q_p^2 - k^2 P_p^2 . P'^2_p = 0, \quad Q_p^4 - k^2 P_p^4 = 0,$$

et de là en divisant par Q_p^4:

$$\Delta^2 \text{am}(pu) - k^2 \sin^2 \text{am}(pu) . \cos^2 \text{am}(pu) = 0, \quad 1 - k^2 \sin^4 \text{am}(pu) = 0.$$

La dernière de ces équations donne: $\sin^2 \text{am}(pu) = \pm \frac{1}{k}$, et de là: $\cos^2 \text{am}(pu) = 1 \mp \frac{1}{k}$, $\Delta^2 \text{am}(pu) = 1 \mp k$. Ces valeurs substituées dans

la première équation donneront: $1 \mp k \mp k^2 . \frac{1}{k}(1 \mp \frac{1}{k}) = 2(1 \mp k) = 0$, équation impossible.

Donc les seconds membres des équations (3) et (4) sont tous réduits à leurs plus simples formes.

De là il suit que les numérateurs et les dénominateurs de ces équations sont égaux entre eux, ou qu'on a:

$$(5)\quad \begin{cases} P_{2p+1} . x = P^2_{p+1} . Q^2_p - P^2_p . Q^2_{p+1}, \\ P'_{2p+1} . y = \frac{1}{k^2}(P''^2_{p+1} P''^2_p - k'^2 . Q^2_{p+1} . Q^2_p), \\ P''_{2p+1} . z = k'^2 Q^2_{p+1} . Q^2_p + k^2 P'^2_{p+1} . P'^2_p, \\ Q_{2p+1} = Q^2_{p+1} . Q^2_p - k^2 P^2_{p+1} . P^2_p. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} P_{2p} = 2P_p . P'_p P''_p . Q_p, \\ P'_{2p} = P'^2_p . Q^2_p - P^2_p . P''^2_p. \\ P''_{2p} = P''^2_p . Q^2_p - k^2 P^2_p . P'^2_p, \\ Q_{2p} = Q^4_p - k^2 P^4_p. \end{cases}$$

En commençant par les formules:

$P_1 = x = \sin am\, u$, $P'_1 = y = \cos am\, u$, $P''_1 = z = \Delta am\, u$, $Q_1 = 1$,

on trouvera de ces équations successivement: $P_2, P'_2, P''_2, Q_2, P_3, P'_3, P''_3, Q_3, \ldots$

$P_2 = 2xyz;$

$P'_2 = y^2 - x^2z^2 = 1 - 2x^2 + k^2x^4 = -k'^2 + 2k'^2y^2 + k^2y^4 = \frac{1}{k^2}(-k'^2 + z^4);$

$P''_2 = z^2 - k^2x^2y^2 = 1 - 2k^2x^2 + k^2x^4 = k'^2 + k^2y^4 = \frac{1}{k^2}(k'^2 - 2k'^2z^2 + z^4);$

$Q_2 = 1 - k^2x^4 = k'^2 + 2k^2y^2 - k^2y^4 = \frac{1}{k^2}(-k'^2 + 2z^2 - z^4);$

$P_3 = x(3 - 4(1 + k^2)x^2 + 6k^2x^4 - k^4x^8);$

$P'_3 = y(-3k'^4 + 4k'^2(1 - 2k^2)y^2 + 6k'^2k^2y^4 + k^4y^8);$

$P''_3 = \frac{z}{k^4}(-3k'^4 + 4k'^2(2 - k^2)z^2 - 6k'^2z^4 + z^8);$

$Q_3 = 1 - 6k^2x^4 + 4k^2(1 + k^2)x^6 - 3k^4x^8 =$

$= k'^4 + 6k'^2k^2y^4 + 4k^4y^6 - 3k^4y^8 =$

$= \frac{1}{k^4}(k'^4 - 6k'^2z^4 + 4(2 - k^2)z^6 - 3z^8);$

$P_4 = 4xyz\,(1 - 2(1 + k^2)x^2 + 5k^2x^4 - 5k^4x^8 + 2k^4(1 + k^2)x^{10} - k^6x^{12});$

$P'_4 = k'^8 - 8k'^8y^2 + 4k'^6(2 - 7k^2)y^4 + 8k'^4k^2(3 - 7k^2)y^6 + 2k'^2k^4(27 - 35k^2)y^8 -$
$- 8k'^2k^4(3 - 7k^2)y^{10} + 4k'^2k^4(2 - 7k^2)y^{12} + 8k'^2k^6y^{14} + k^8y^{16};$

$P''_4 = \frac{1}{k^8}(k'^8 - 8k'^8z^2 + 4k'^6(7 - 2k^2)z^4 - 8k'^4(7 - 3k^2)z^6 + 2k'^2(35 - 27k^2)z^8 -$
$- 8k'^2(7 - 3k^2)z^{10} + 4k'^2(7 - 2k^2)z^{12} - 8k'^2z^{14} + z^{16});$

$Q_4 = 1 - 20k^2x^4 + 32k^2(1 + k^2)x^6 - 2k^2(8 + 29k^2 + 8k^4)x^8 + 32k^4(1 + k^2)x^{10} -$
$- 20k^6x^{12} + k^8x^{16} = k'^8 + 8k'^6k^2y^2 - 4k'^4k^2(5 - 7k^2)y^4 + 8k'^4k^2(4 - 7k^2)y^6 -$
$- 2k'^4k^2(8 - 35k^2)y^8 - 8k'^2k^4(4 - 7k^2)y^{10} - 4k^6(5 - 7k^2)y^{12} - 8k^8y^{14} + k^8y^{16} =$
$= \frac{1}{k^8}(k'^8 - 8k'^6z^2 + 4k'^4(7 - 5k^2)z^4 - 8k'^4(7 - 4k^2)z^6 + 2k'^4(35 - 8k^2)z^8 -$
$- 8k'^2(7 - 4k^2)z^{10} + 4(7 - 5k^2)z^{12} - 8z^{14} + z^{16}; \ldots .$

27. On peut des formules (5) et (6) du paragraphe précédent déduire les propriétés des fonctions P_n, P'_n, P''_n, Q_n.

D'abord on en déduit que:

$$\frac{P_{2p+1}}{x}, \frac{P'_{2p+1}}{y}, \frac{P''_{2p+1}}{z} \text{ et } Q_{2p+1}$$

sont des fonctions entières et paires de x, de y et de z du degré: $(2p+1)^2 - 1 = 4p^2 + 4p$; que:

$$P'_{2p},\ P''_{2p} \text{ et } Q_{2p}$$

sont des fonctions entières et paires de x, de y et de z du degré: $(2p)^2 = 4p^2$; enfin que:

$$\frac{P_{2p}}{xyz}$$

est une fonction entière et paire de x, de y et de z du degré: $(2p)^2 - 4 = 4p^2 - 4$.

En effet, si cela a lieu pour les indices p et $p+1$, il suit des formules (5) et (6) qu'il aura encore lieu pour les indices $2p+1$ et $2p$.

Ainsi, si p est un nombre pair, donc $p+1$ impair, P_{p+1} sera une fonction impaire de x du degré: $(p+1)^2$, donc P^2_{p+1} une fonction paire du degré: $2(p+1)^2 = 2p^2 + 4p + 2$; Q_p sera une fonction paire du degré p^2, donc Q_p^2 une fonction paire du degré $2p^2$, et $P^2_{p+1} \cdot Q_p^2$ une fonction paire du degré: $4p^2 + 4p + 2$. De plus P_p^2 sera une fonction paire de x du degré: $2(p^2 - 4) + 6 = 2p^2 - 2$, Q_{p+1} une fonction paire du degré: $(p+1)^2 - 1 = p^2 + 2p$, donc Q^2_{p+1} une fonction paire du degré $2p^2 + 4p$, et $P_p^2 \cdot Q^2_{p+1}$ une fonction paire du degré: $4p^2 + 4p - 2$. Donc $P_{2p+1} \cdot x$ sera une fonction paire du degré $4p^2 + 4p + 2$, donc enfin $\frac{P_{2p+1}}{x}$ une fonction paire du degré $4p^2 + 4p = (2p+1)^2 - 1$.

Si p est un nombre impair, $p+1$ sera un nombre pair. Alors P^2_{p+1} sera une fonction paire du degré: $2((p+1)^2 - 4) + 6 = 2p^2 + 4p$; Q_p sera une fonction paire du degré $p^2 - 1$, donc Q_p^2 une fonction paire du degré $2p^2 - 2$, et $P^2_{p+1} \cdot Q_p^2$ une fonction paire du degré: $4p^2 + 4p - 2$. De plus P_p sera une fonction impaire de x du degré p^2, donc P_p^2 une fonction paire du degré $2p^2$; Q_{p+1} sera une fonction paire du degré $(p+1)^2$, donc Q^2_{p+1} une fonction paire du degré $2(p+1)^2 = 2p^2 + 4p + 2$, et $P_p^2 \cdot Q^2_{p+1}$ une fonction paire du degré: $4p^2 + 4p + 2$. Donc enfin $\frac{P_{2p+1}}{x}$ sera une fonction paire du degré $4p^2 + 4p = (2p+1)^2 - 1$. Et ainsi de suite.

Maintenant les théorèmes ci-dessus ont lieu pour les indices 1 et 2, donc ils auront lieu pour les indices 3 et 4; puisque ils ont lieu pour les indices 2 et 3, ils auront encore lieu pour les indices 4 et 5; puisque ils ont lieu pour les indices 3 et 4, ils auront encore lieu pour les indices 6 et 7, et ainsi de suite pour toutes les valeurs de l'indice.

On a donc pour les indices impairs:

(1) $\sin\mathrm{am}((2p+1)u)=\dfrac{xF_{2p+1}(x^2)}{f_{2p+1}(x^2)}$; $\cos\mathrm{am}((2p+1)u)=\dfrac{yF'_{2p+1}(y^2)}{f'_{2p+1}(y^2)}$;

$$\Delta\,\mathrm{am}((2p+1)u)=\frac{zF''_{2p+1}(z^2)}{f''_{2p+1}(z^2)};$$

où $F_{2p+1}(x^2)$, $F'_{2p+1}(y^2)$, $F''_{2p+1}(z^2)$, $f_{2p+1}(x^2)$, $f'_{2p+1}(y^2)$, $f''_{2p+1}(z^2)$ sont des fonctions entières et paires de x, y, z du degré $(2p+1)^2-1$, et $f_{2p+1}(x^2)=f'_{2p+1}(y^2)=f''_{2p+1}(z^2)$.

Pour les indices pairs on a:

(2) $\sin\mathrm{am}(2pu)=\dfrac{xyzF_{2p}(x^2)}{f_{2p}(x^2)}$; $\cos\mathrm{am}(2pu)=\dfrac{F'_{2p}(y^2)}{f'_{2p}(y^2)}$; $\Delta\mathrm{am}(2pu)=\dfrac{F''_{2p}(z^2)}{f''_{2p}(z^2)}$,

où $F_{2p}(x^2)$, $F'_{2p}(y^2)$, $F''_{2p}(z^2)$, $f_{2p}(x^2)$, $f'_{2p}(y^2)$, $f''_{2p}(z^2)$ sont des fonctions entières et paires de x, y, z, la première du degré $(2p)^2-4$, les autres du degré $(2p)^2$, et $f_{2p}(x^2)=f'_{2p}(y^2)=f''_{2p}(z^2)$.

Des équations (5) et (6) du **26** on déduit immédiatement que le second terme du dénominateur commun des trois fonctions elliptiques, Q, exprimé en fonction de x^2, c'est à dire le terme de $f_{2p+1}(x^2)$ et $f_{2p}(x^2)$ qui devrait contenir x^2, disparaîtra toujours. En effet, puisque $P^2_{p+1}.P^2_p$ et P^4_p sont toujours divisibles par x^4, si ce terme manque dans Q_p et Q_{p+1}, il manquera aussi dans Q_{2p+1} et Q_{2p}. Maintenant on a $Q_1=1$ et $Q_2=1-k^2x^4$, où le terme x^2 ne se trouve pas, donc les fonctions Q ne contiendront jamais le terme x^2.

On voit de plus que les coefficients des fonctions $F(x^2)$, $F'(y^2)$, $F''(z^2)$, $f(x^2)$, $f'(y^2)$, $f''(z^2)$ seront toujours des fonctions entières de k^2 ou de $\frac{1}{k^2}$.

28. A l'aide des équations (1), (4) et (5) du **22** on peut trouver des relations remarquables entre les coefficients des fonctions $F_n(x^2)$, $F'_n(y^2)$, $F''_n(z^2)$, $f_n(x^2)$, $f'_n(y^2)$, $f''_n(z^2)$. Soit donc:

$$Q_{2p}=f_{2p}(x^2)=A_{2p}+B_{2p}x^2+C_{2p}x^4+\ldots+D_{2p}x^{(2p)^2-4}+E_{2p}x^{(2p)^2-2}+F_{2p}x^{(2p)^2}=$$
$$=f'_{2p}(y^2)=A'_{2p}+B'_{2p}y^2+C'_{2p}y^4+\ldots+D'_{2p}y^{(2p)^2-4}+E'_{2p}y^{(2p)^2-2}+F'_{2p}y^{(2p)^2}=$$
$$=f''_{2p}(z^2)=A''_{2p}+B''_{2p}z^2+C''_{2p}z^4+\ldots+D''_{2p}z^{(2p)^2-4}+E''_{2p}z^{(2p)^2-2}+F''_{2p}z^{(2p)^2};$$
$$\frac{1}{xyz}.P_{2p}=F_{2p}(x^2)=G_{2p}+H_{2p}x^2+I_{2p}x^4+\ldots+L_{2p}x^{(2p)^2-8}+M_{2p}x^{(2p)^2-6}+N_{2p}x^{(2p)^2-4};$$
$$P'_{2p}=F'_{2p}(y^2)=G'_{2p}+H'_{2p}y^2+I'_{2p}y^4+\ldots+L'_{2p}y^{(2p)^2-4}+M'_{2p}y^{(2p)^2-2}+N'_{2p}y^{(2p)^2};$$
$$P''_{2p}=F''_{2p}(z^2)=G''_{2p}+H''_{2p}z^2+I''_{2p}z^4+\ldots+L''_{2p}z^{(2p)^2-4}+M''_{2p}z^{(2p)^2-2}+N''_{2p}z^{(2p)^2};$$

$$Q_{2p+1}=f_{2p+1}(x^2)=A_{2p+1}+B_{2p+1}x^2+C_{2p+1}x^4+\ldots\ldots$$
$$\ldots+D_{2p+1}x^{(2p+1)^2-5}+E_{2p+1}x^{(2p+1)^2-3}+F_{2p+1}x^{(2p+1)^2-1}=$$
$$=f'_{2p+1}(x^2)=A'_{2p+1}+B'_{2p+1}y^2+C'_{2p+1}y^4+\ldots\ldots$$
$$\ldots+D'_{2p+1}y^{(2p+1)^2-5}+E'_{2p+1}y^{(2p+1)^2-3}+F'_{2p+1}y^{(2p+1)^2-1}=$$
$$=f''_{2p+1}(z^2)=A''_{2p+1}+B''_{2p+1}z^2+C''_{2p+1}z^4+\ldots\ldots$$
$$\ldots+D''_{2p+1}z^{(2p+1)^2-5}+E''_{2p+1}z^{(2p+1)^2-3}+F''_{2p+1}z^{(2p+1)^2-1};$$

$$\underset{x}{P_{2p+1}} = F_{2p+1}(x^2) = G_{2p+1} + H_{2p+1}x^2 + I_{2p+1}x^4 + \ldots .$$
$$\ldots + L_{2p+1}x^{(2p+1)^2-5} + M_{2p+1}x^{(2p+1)^2-3} + N_{2p+1}x^{(2p+1)^2-1};$$
$$\underset{y}{P'_{2p+1}} = F'_{2p+1}(y^2) = G'_{2p+1} + H'_{2p+1}y^2 + I'_{2p+1}y^4 + \ldots .$$
$$\ldots + L'_{2p+1}y^{(2p+1)^2-5} + M'_{2p+1}y^{(2p+1)^2-3} + N'_{2p+1}y^{(2p+1)^2-1};$$
$$\underset{z}{P''_{2p+1}} = F''_{2p+1}(z^2) = G''_{2p+1} + H''_{2p+1}z^2 + I''_{2p+1}z^4 + \ldots .$$
$$\ldots + L''_{2p+1}z^{(2p+1)^2-5} + M''_{2p+1}z^{(2p+1)^2-3} + N''_{2p+1}z^{(2p+1)^2-1}.$$

Si l'on pose maintenant $u = u + iK'$, et $\sin\mathrm{am}\, u = x$, $\cos\mathrm{am}\, u = y$, $\Delta\mathrm{am}\, u = z$, on a suivant les équations (5) du **22**:

$$x = \sin\mathrm{am}\, u = \sin\mathrm{am}\,(u + iK') = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\sin\mathrm{am}\, u} = \frac{1}{kx},$$

$$y = \cos\mathrm{am}\, u = \cos\mathrm{am}\,(u + iK') = -\frac{i}{k}\cdot\frac{\Delta\mathrm{am}\, u}{\sin\mathrm{am}\, u} = -\frac{iz}{kx},$$

$$z = \Delta\mathrm{am}\, u = \Delta\mathrm{am}\,(u + iK') = -i\cdot\frac{\cos\mathrm{am}\, u}{\sin\mathrm{am}\, u} = -\frac{iy}{x}.$$

En substituant ces valeurs on aura:

$$\sin\mathrm{am}\,(2pu) = \frac{xyzF_{2p}(x^2)}{f_{2p}(x^2)} =$$

$$= \frac{xyz(G_{2p} + H_{2p}x^2 + I_{2p}x^4 + \ldots + L_{2p}x^{(2p)^2-8} + M_{2p}x^{(2p)^2-6} + N_{2p}x^{(2p)^2-4})}{A_{2p} + B_{2p}x^2 + C_{2p}x^4 + \ldots + D_{2p}x^{(2p)^2-4} + E_{2p}x^{(2p)^2-2} + F_{2p}x^{(2p)^2}} =$$

$$= -\frac{yz}{k^2x^3}\cdot\frac{G_{2p} + \frac{H_{2p}}{k^2x^2} + \frac{I_{2p}}{k^4x^4} + \ldots + \frac{L_{2p}}{k^{(2p)^2-8}x^{(2p)^2-8}} + \frac{M_{2p}}{k^{(2p)^2-6}x^{(2p)^2-6}} + \frac{N_{2p}}{k^{(2p)^2-4}x^{(2p)^2-4}}}{A_{2p} + \frac{B_{2p}}{k^2x^2} + \frac{C_{2p}}{k^4x^4} + \ldots + \frac{D_{2p}}{k^{(2p)^2-4}x^{(2p)^2-4}} + \frac{E_{2p}}{k^{(2p)^2-2}x^{(2p)^2-2}} + \frac{F_{2p}}{k^{(2p)^2}x^{(2p)^2}}} =$$

$$= -k^2xyz\cdot\frac{N_{2p} + M_{2p}k^2x^2 + L_{2p}k^4x^4 + \ldots + I_{2p}k^{(2p)^2-8}x^{(2p)^2-8} + H_{2p}k^{(2p)^2-6}x^{(2p)^2-6} + G_{2p}k^{(2p)^2-4}x^{(2p)^2-4}}{F_{2p} + E_{2p}k^2x^2 + D_{2p}k^4x^4 + \ldots + C_{2p}k^{(2p)^2-4}x^{(2p)^2-4} + B_{2p}k^{(2p)^2-2}x^{(2p)^2-2} + A_{2p}k^{(2p)^2}x^{(2p)^2}}$$

Mais on a suivant les lois du périodicité des fonctions elliptiques (8) du **22**:

$$\sin\mathrm{am}\,(2pu) = \sin\mathrm{am}\,(2pu + 2piK') = \sin\mathrm{am}\,(2pu) =$$
$$= \frac{xyz(G_{2p} + H_{2p}x^2 + I_{2p}x^4 + \ldots + L_{2p}x^{(2p)^2-8} + M_{2p}x^{(2p)^2-6} + N_{2p}x^{(2p)^2-4})}{A_{2p} + B_{2p}x^2 + C_{2p}x^4 + \ldots + D_{2p}x^{(2p)^2-4} + E_{2p}x^{(2p)^2-2} + F_{2p}x^{(2p)^2}}.$$

Puisque ces deux fractions sont irréductibles, ils seront identiques, ce qui donne lieu aux relations suivantes:

$$\frac{G_{2p}}{A_{2p}} = -k^2\cdot\frac{N_{2p}}{F_{2p}};\quad \frac{H_{2p}}{A_{2p}} = -k^4\cdot\frac{M_{2p}}{F_{2p}};\quad \frac{I_{2p}}{A_{2p}} = -k^6\cdot\frac{L_{2p}}{F_{2p}};\ \ldots\ldots$$

$$\frac{N_{2p}}{A_{2p}} = -k^{(2p)^2-2}\cdot\frac{G_{2p}}{F_{2p}};\quad \frac{M_{2p}}{A_{2p}} = -k^{(2p)^2-4}\cdot\frac{H_{2p}}{F_{2p}};\quad \frac{L_{2p}}{A_{2p}} = -k^{(2p)^2-6}\cdot\frac{I_{2p}}{F_{2p}};\ \ldots\ldots$$

$$\frac{B_{2p}}{A_{2p}} = k^2\cdot\frac{E_{2p}}{F_{2p}};\quad \frac{C_{2p}}{A_{2p}} = k^4\cdot\frac{D_{2p}}{F_{2p}};\ \ldots\ldots$$

$$\frac{F_{2p}}{A_{2p}} = k^{(2p)^2}\cdot\frac{A_{2p}}{F_{2p}};\quad \frac{E_{2p}}{A_{2p}} = k^{(2p)^2-2}\cdot\frac{B_{2p}}{F_{2p}};\quad \frac{D_{2p}}{A_{2p}} = k^{(2p)^2-4}\cdot\frac{C_{2p}}{F_{2p}};\ \ldots\ldots$$

On peut réduire ces relations aux suivantes:

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{N_{2p}}{G_{2p}} = -\frac{1}{k^2}\cdot\frac{F_{2p}}{A_{2p}};\ \frac{M_{2p}}{H_{2p}} = -\frac{1}{k^4}\cdot\frac{F_{2p}}{A_{2p}};\ \frac{L_{2p}}{I_{2p}} = -\frac{1}{k^6}\cdot\frac{F_{2p}}{A_{2p}};\ \ldots\ldots \\ \frac{E_{2p}}{B_{2p}} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{F_{2p}}{A_{2p}};\ \frac{D_{2p}}{C_{2p}} = \frac{1}{k^4}\cdot\frac{F_{2p}}{A_{2p}};\ \ldots\ldots \text{et } \left(\frac{F_{2p}}{A_{2p}}\right)^2 = k^{(2p)^2}. \end{cases}$$

De même on trouve:

$$\text{sinam}((2p+1)u) = \frac{xF_{2p+1}(x^2)}{f_{2p+1}(x^2)} =$$

$$= \frac{x(G_{2p+1}+H_{2p+1}x^2+I_{2p+1}x^4+\ldots+L_{2p+1}x^{(2p+1)^2-5}+M_{2p+1}x^{(2p+1)^2-3}+N_{2p+1}x^{(2p+1)^2-1})}{A_{2p+1}+B_{2p+1}x^2+C_{2p+1}x^4+\ldots+D_{2p+1}x^{(2p+1)^2-5}+E_{2p+1}x^{(2p+1)^2-3}+F_{2p+1}x^{(2p+1)^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{kx}\cdot\frac{N^{2p+1}+M_{2p+1}k^2x^2+L_{2p+1}k^4x^4+\ldots+H_{2p+1}k^{(2p+1)^2-3}x^{(2p+1)^2-3}+G_{2p+1}k^{(2p+1)^2-1}x^{(2p+1)^2-1}}{F_{2p+1}+E_{2p+1}k^2x^2+D_{2p+1}k^4x^4+\ldots+B_{2p+1}k^{(2p+1)^2-3}x^{(2p+1)^2-3}+A_{2p+1}k^{(2p+1)^2-1}x^{(2p+1)^2-1}}$$

et d'un autre côté des formules (5) et (8) du **22**:

$$\text{sinam}((2p+1)u) = \text{sinam}((2p+1)u+(2p+1)iK') = \frac{1}{k\,\text{sinam}((2p+1)u)} =$$

$$= \frac{1}{kx}\cdot\frac{A_{2p+1}+B_{2p+1}x^2+C_{2p+1}x^4+\ldots+D_{2p+1}x^{(2p+1)^2-5}+E_{2p+1}x^{(2p+1)^2-3}+F_{2p+1}x^{(2p+1)^2-1}}{G_{2p+1}+H_{2p+1}x^2+I_{2p+1}x^4+\ldots+L_{2p+1}x^{(2p+1)^2-5}+M_{2p+1}x^{(2p+1)^2-3}+N_{2p+1}x^{(2p+1)^2-1}}.$$

Puisque ces deux fractions sont irréductibles, ils seront identiques, ce qui donne lieu aux relations suivantes:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{N_{2p+1}}{A_{2p+1}} = \frac{F_{2p+1}}{G_{2p+1}};\ \frac{M_{2p+1}}{B_{2p+1}} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{F_{2p+1}}{G_{2p+1}};\ \frac{L_{2p+1}}{C_{2p+1}} = \frac{1}{k^4}\cdot\frac{F_{2p+1}}{G_{2p+1}};\ \ldots\ldots \\ \frac{E_{2p+1}}{H_{2p+1}} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{F_{2p+1}}{G_{2p+1}};\ \frac{D_{2p+1}}{I_{2p+1}} = \frac{1}{k^4}\cdot\frac{F_{2p+1}}{G_{2p+1}};\ \ldots \text{ et } \left(\frac{F_{2p+1}}{G_{2p+1}}\right)^2 = k^{(2p+1)^2-1} \end{cases}$$

On a de plus:

$$A_{2p} = \lim_{x=o}(Q_{2p}) = \lim_{x=o}(Q_p^4 - k^2P_p^4) = \lim_{x=o}(Q_p^4) = A_p^4;$$

$$A_{2p+1} = \lim_{x=o}(Q_{2p+1}) = \lim_{x=o}(Q_{p+1}^2.Q_p^2 - k^2P_{p+1}^2.P_p^2) = \lim_{x=o}(Q_{p+1}^2.Q_p^2) = A_{p+1}^2.A_p^2,$$

puisque P_p disparaît toujours avec x. De ces équations jointes à la valeur initiale $A_p = 1$, il résulte qu'on a toujours: $A_{2p} = A_{2p+1} = 1$.

De plus on a:

$$\frac{G_{2p}}{A_{2p}} = \lim_{x=o}\left(\frac{F_{2p}(x^2)}{f_{2p}(x^2)}\right) = \lim_{u=o}\left(\frac{\text{sinam}(2pu)}{\text{sinam}\,u.\,\text{cosam}\,u.\,\Delta\text{am}\,u}\right) = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{u=o}\left(\frac{2p.\,\text{cosam}(2pu).\,\Delta\text{am}(2pu)}{\text{cos}^2\text{am}\,u.\,\Delta^2\text{am}\,u - \text{sin}^2\text{am}\,u.\,\Delta^2\text{am}\,u - k^2\text{sin}^2\text{am}\,u.\text{cos}^2\text{am}\,u}\right) = 2p,$$

$$\frac{G_{2p+1}}{A_{2p+1}} = \lim_{x=o}\left(\frac{F_{2p+1}(x^2)}{f_{2p+1}(x^2)}\right) = \lim_{u=o}\left(\frac{\text{sinam}((2p+1)u)}{\text{sinam}\,u}\right) = \frac{0}{0} = 2p+1$$

et de là: $G_{2p} = 2p$, $G_{2p+1} = 2p+1$.

En substituant ces valeurs des A et des G dans les formules (1) et (2) on trouve:

$$F^2_{2p} = k^{(2p)^2} = k^{4p^2};\ F^2_{2p+1} = (2p+1)^2\,k^{(2p+1)^2-1} = (2p+1)^2k^{4p^2+4p}.$$

Il reste maintenant à trouver les signes de F_{2p} et F_{2p+1}. A cet effet on remarque que:

$$F_{2p} = \lim_{x=\infty}\left(\frac{Q_{2p}}{x^{(2p)^2}}\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{Q_p^4 - k^2 P_p^4}{x^{4p^2}}\right).$$

Or si p est un nombre pair, le degré de Q_p^4 sera: $4p^2$, et celui de P_p^4 sera $4p^2-4$; si p est un nombre impair, le degré de Q_p^4 sera $4p^2-4$, et celui de P_p^4 sera $4p^2$. Donc on aura pour des valeurs paires de p:

$$F_{2p} = \lim_{x=\infty}\left(\frac{Q_p^4}{x^{4p^2}}\right) = F_p^4,$$

et pour des valeurs impaires de p:

$$F_{2p} = \lim_{x=\infty}\left(-k^2.\frac{P_p^4}{x^{4p^2}}\right) = -k^2 N_p^4.$$

Donc F_{2p} sera positif, si p est un nombre pair, négatif, si p est un nombre impair. Donc enfin de l'équation $(F_{2p})^2 = k^{4p^2}$ on tire: $F_{2p} = (-1)^p . k^{2p^2}$.

De même on a:

$$F_{2p+1} = \lim_{x=\infty}\left(\frac{Q_{2p+1}}{x^{(2p+1)^2-1}}\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{Q^2_{p+1}.Q_p{}^2 - k^2 P^2_{p+1}.P_p{}^2}{x^{4p^2+4p}}\right).$$

Maintenant, si p est un nombre pair, le degré de $Q^2_{p+1}.Q_p^2$ sera: $2((p+1)^2-1)+ + 2p^2 = 4p^2+4p$, et celui de $P^2_{p+1}.P_p^2$ sera: $2(p+1)^2+2(p^2-4)+6 = = 4p^2+4p$. Si p est un nombre impair le degré de $Q^2_{p+1}.Q_p^2$ sera: $2(p+1)^2+2(p^2-1) = 4p^2+4p$, et celui de $P^2_{p+1}.P_p^2$ sera: $2((p+1)^2-4)+ + 6 + 2p^2 = 4p^2+4p$. Donc on aura toujours:

$$F_{2p+1} = F^2_{p+1}.F_p^2 - k^2 N^2_{p+1}.N_p^2.\lim_{x=\infty}\left(\frac{y^2z^2}{x^4}\right) = F^2_{p+1}.F_p^2 - k^4 N^2_{p+1}.N_p^2 =$$

$$= F^2_{p+1}.F_p^2\left(1 - k^4.\left(\frac{N_{p+1}}{F_{p+1}}\right)^2.\left(\frac{N_p}{F_p}\right)^2\right).$$

Mais, si p est un nombre pair, on a suivant les équations (1) et (2): $\frac{N_p}{F_p} = = -\frac{1}{k^2}.\frac{G_p}{A_p} = -\frac{1}{k^2}.p$, et $\frac{N_{p+1}}{F_{p+1}} = \frac{A_{p+1}}{G_{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, donc on aura:

$$F_{2p+1} = F^2_{p+1}.F_p^2\left(1 - \left(\frac{p}{p+1}\right)^2\right) = \frac{2p+1}{(p+1)^2}.F^2_{p+1}.F_p^2.$$

Si p est un nombre impair, on a: $\frac{N_{p+1}}{F_{p+1}} = -\frac{1}{k^2}.\frac{G_{p+1}}{A_{p+1}} = -\frac{1}{k^2}.(p+1)$,

et $\frac{N_p}{F_p} = \frac{A_p}{G_p} = \frac{1}{p}$, donc: $F_{2p+1} = F^2_{p+1}.F_p^2\left(1-\left(\frac{p+1}{p}\right)^2\right) = -\frac{2p+1}{p^2}.F^2_{p+1}.F_p^2$.

Donc F_{2p+1} sera positif, si p est un nombre pair, négatif, si p est un nombre impair. Donc enfin de l'équation: $F^2_{2p+1} = (2p+1)^2.k^{4p^2+4p}$ on tire: $F_{2p+1} = (-1)^p\,(2p+1).k^{2p^2+2p}$.

Dans le paragraphe précédent nous avons trouvé que le terme de x^2 dans les fonctions Q doit toujours disparaître; donc on aura: $B_{2p} = 0$, $B_{2p+1} = 0$.

En substituant ces valeurs des A, B, F, G, dans les équations (1) et (2) on trouvera:

$$(3)\quad \begin{cases} A_{2p}=1,\ B_{2p}=o,\ E_{2p}=o,\ F_{2p}=(-1)^p k^{2p^2};\ G_{2p}=2p;\ N_{2p}=-(-1)^p.2p\,k^{2p^2-2}; \\ \dfrac{M_{2p}}{H_{2p}}=-(-1)^p\,k^{2p^2-1};\ \dfrac{L_{2p}}{I_{2p}}=-(-1)^p\,k^{2p^2-6};\ \ldots\ldots\ \dfrac{D_{2p}}{C_{2p}}=(-1)^p\,k^{2p^2-4}\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} A_{2p+1}=1,\ B_{2p+1}=o,\ F_{2p+1}=(-1)^p\,(2p+1)\,k^{2p^2+2p}; \\ G_{2p+1}=2p+1;\ N_{2p+1}=(-1)^p\,k^{2p^2+2p};\ M_{2p+1}=o; \\ \dfrac{L_{2p+1}}{C_{2p+1}}=(-1)^p\,k^{2p^2+2p-4},\ldots\ \dfrac{I_{2p+1}}{D_{2p+1}}=\dfrac{(-1)^p}{k^{2p^2+2p-4}};\ \dfrac{H_{2p+1}}{E_{2p+1}}=\dfrac{(-1)^p}{k^{2p^2+2p-2}}. \end{cases}$$

De la même manière si l'on pose $u=u+K+iK'$, en ayant égard à la seconde des équations (4) du **22**:

$$y=\operatorname{cos\,am}\,u=\operatorname{cos\,am}\,(u+K+iK')=-\frac{ik'}{k}.\frac{1}{\operatorname{cos\,am}\,u}=-\frac{ik'}{k}.\frac{1}{y},$$

on trouvera:

$$(5)\quad \begin{cases} A'_{2p}=k'^{2p^2};\ F'_{2p}=(-1)^p k^{2p^2};\ G'_{2p}=(-1)^p k'^{2p^2};\ N'_{2p}=k^{2p^2}; \\ \dfrac{M'_{2p}}{H'^{*}_{2p}}=-(-1)^p.\left(\dfrac{k}{k'}\right)^{2p^2-2};\ \dfrac{L'_{2p}}{I'_{2p}}=(-1)^p.\left(\dfrac{k}{k'}\right)^{2p^2-4};\ \ldots\ldots \\ \dfrac{E'_{2p}}{B'_{2p}}=-(-1)^p\left(\dfrac{k}{k'}\right)^{2p^2-2};\ \dfrac{D'_{2p}}{C'_{2p}}=(-1)^p\left(\dfrac{k}{k'}\right)^{2p^2-4};\ \ldots\ldots \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} A'_{2p+1}=k'^{2p^2+2p};\ F'_{2p+1}=(-1)^p\,(2p+1)k^{2p^2+2p}; \\ G'_{2p+1}=(-1)^p\,(2p+1)k'^{2p^2+2p};\ N'_{2p+1}=k^{2p^2+2p}; \\ \dfrac{M'_{2p+1}}{B'_{2p+1}}=-\left(\dfrac{k}{k'}\right)^{2p^2+2p-2};\ \dfrac{L'_{2p+1}}{C'_{2p+1}}=\left(\dfrac{k}{k'}\right)^{2p^2+2p-4};\ \ldots\ldots \\ \dfrac{I'_{2p+1}}{D'_{2p+1}}=\left(\dfrac{k}{k'}\right)^{2p^2+2p-4};\ \dfrac{H'_{2p+1}}{E'_{2p+1}}=-\left(\dfrac{k'}{k}\right)^{2p^2+2p-2}. \end{cases}$$

Enfin si l'on pose $u=u+K$, en ayant égard à la troisième des équations (1) du **22**:

$$z=\Delta\,\operatorname{am}\,u=\Delta\,\operatorname{am}\,(u+K)=\frac{k'}{\Delta\,\operatorname{am}\,u}=\frac{k'}{z}$$

on trouvera:

$$(7)\quad \begin{cases} A''_{2p}=(-1)^p\left(\dfrac{k'}{k}\right)^{2p^2};\ F''_{2p}=(-1)^p.\dfrac{1}{k^{2p^2}};\ G''_{2p}=\left(\dfrac{k'}{k}\right)^{2p^2},\ N''_{2p}=\dfrac{1}{k^{2p^2}}; \\ \dfrac{M''_{2p}}{H''_{2p}}=\dfrac{1}{k'^{2p^2-2}};\ \dfrac{L''_{2p}}{I''_{2p}}=\dfrac{1}{k'^{2p^2-4}};\ \ldots\ldots\ \dfrac{E''_{2p}}{B''_{2p}}=\dfrac{1}{k'^{2p^2-2}};\ \dfrac{D''_{2p}}{C''_{2p}}=\dfrac{1}{k'^{2p^2-4}}. \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} A''_{2p+1}=\left(\dfrac{k'}{k}\right)^{2p^2+2p};\ F''_{2p+1}=(-1)^p.\dfrac{2p+1}{k^{2p^2+2p}}; \\ G''_{2p+1}=(-1)^p.(2p+1)\left(\dfrac{k'}{k}\right)^{2p^2+2p};\ N''_{2p+1}=\dfrac{1}{k^{2p^2+2p}}; \\ \dfrac{M''_{2p+1}}{B''_{2p+1}}=\dfrac{1}{k'^{2p^2+2p-2}};\ \dfrac{L''_{2p+1}}{C''_{2p+1}}=\dfrac{1}{k'^{2p^2+2p-4}};\ \ldots\ldots \\ \dfrac{I''_{2p+1}}{D''_{2p+1}}=k'^{2p^2+2p-4};\ \dfrac{H''_{2p+1}}{E''_{2p+1}}=k'^{2p^2+2p-2}. \end{cases}$$

29. Si l'on multiplie les équations (1) et (2) du **27** par leurs dénominateurs, et qu'on élève la première des équations (2) au carré pour en faire disparaître les radicaux en x: $y = \sqrt{1-x^2}$, $z = \sqrt{1-k^2x^2}$, on aura les équations suivantes:

$$(1)\quad \begin{cases} (A_{2p+1}+B_{2p+1}x^2+\ldots+E_{2p+1}x^{(2p+1)^2-3}+F_{2p+1}x^{(2p+1)^2-1}).\sin am((2p+1)u) = \\ \quad = G_{2p+1}x+H_{2p+1}x^3+\ldots+M_{2p+1}x^{(2p+1)^2-2}+N_{2p+1}x^{(2p+1)^2}; \\ (A'_{2p+1}+B'_{2p+1}y^2+\ldots+E'_{2p+1}y^{(2p+1)^2-3}+F'_{2p+1}y^{(2p+1)^2-1}).\cos am((2p+1)u) = \\ \quad = G'_{2p+1}y+H'_{2p+1}y^3+\ldots+M'_{2p+1}y^{(2p+1)^2-2}+N'_{2p+1}y^{(2p+1)^2}; \\ (A''_{2p+1}+B''_{2p+1}z^2+\ldots+E''_{2p+1}z^{(2p+1)^2-3}+F''_{2p+1}z^{(2p+1)^2-1}).\Delta am((2p+1)u) = \\ \quad = G''_{2p+1}z+H''_{2p+1}z^3+\ldots+M''_{2p+1}z^{(2p+1)^2-2}+N''_{2p+1}z^{(2p+1)^2}; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} (A_{2p}+B_{2p}x^2+\ldots+E_{2p}x^{(2p)^2-2}+F_{2p}x^{(2p)^2}).\sin^2am(2pu) = \\ \quad =(1-x^2)(1-k^2x^2)(G_{2p}x+H_{2p}x^3+\ldots+M_{2p}x^{(2p)^2-5}+N_{2p}x^{(2p)^2-3})^2; \\ (A'_{2p}+B'_{2p}y^2+\ldots+E'_{2p}y^{(2p)^2-2}+F'_{2p}y^{(2p)^2}).\cos am(2pu) = \\ \quad = G'_{2p}+H'_{2p}y^2+\ldots+M'_{2p}y^{(2p)^2-2}+N'_{2p}y^{(2p)^2}; \\ (A''_{2p}+B''_{2p}z^2+\ldots+E''_{2p}z^{(2p)^2-2}+F''_{2p}z^{(2p)^2}).\Delta am(2pu) = \\ \quad = G''_{2p}+H''_{2p}z^2+\ldots+M''_{2p}z^{(2p)^2-2}+N''_{2p}z^{(2p)^2}; \end{cases}$$

ou, si l'on reduit ces équations à la forme normale des équations algébriques:

$$(3)\quad \begin{cases} x^{(2p+1)^2}-\dfrac{F_{2p+1}}{N_{2p+1}}.\sin am((2p+1)u).x^{(2p+1)^2-1}+\dfrac{M_{2p+1}}{N_{2p+1}}.x^{(2p+1)^2-2}-\ldots \\ \quad \ldots+\dfrac{G_{2p+1}}{N_{2p+1}}.x-\dfrac{A_{2p+1}}{N_{2p+1}}.\sin am((2p+1)u)=0; \\ y^{(2p+1)^2}-\dfrac{F'_{2p+1}}{N'_{2p+1}}.\cos am((2p+1)u).y^{(2p+1)^2-1}+\dfrac{M'_{2p+1}}{N'_{2p+1}}.y^{(2p+1)^2-2}-\ldots \\ \quad \ldots+\dfrac{G'_{2p+1}}{N'_{2p+1}}.y-\dfrac{A'_{2p+1}}{N'_{2p+1}}.\cos am((2p+1)u)=0; \\ z^{(2p+1)^2}-\dfrac{F''_{2p+1}}{N''_{2p+1}}.\Delta am((2p+1)u).z^{(2p+1)^2-1}+\dfrac{M''_{2p+1}}{N''_{2p+1}}.z^{(2p+1)^2-2}-\ldots \\ \quad \ldots+\dfrac{G''_{2p+1}}{N''_{2p+1}}.z-\dfrac{A''_{2p+1}}{N''_{2p+1}}.\Delta am((2p+1)u)=0; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} x^{2(2p)^2}-\left(\dfrac{k^2N_{2p}^2-2E_{2p}F_{2p}.\sin^2am(2pu)}{F_{2p}^2.\sin^2am(2pu)}\right).x^{2(2p)^2-2}+\ldots \\ \quad \ldots-\dfrac{G_{2p}^2-2A_{2p}B_{2p}.\sin^2am(2pu)}{F_{2p}^2.\sin^2am(2pu)}.x^2+\dfrac{A_{2p}^2}{F_{2p}^2}=0; \\ y^{(2p)^2}+\dfrac{M'_{2p}-E'_{2p}.\cos am(2pu)}{N'_{2p}-F'_{2p}.\cos am(2pu)}.y^{(2p)^2-2}+\ldots. \\ \quad \ldots+\dfrac{H'_{2p}-B'_{2p}.\cos am(2pu)}{N'_{2p}-F'_{2p}.\cos am(2pu)}.y^2+\dfrac{G'_{2p}-A'_{2p}.\cos am(2pu)}{N'_{2p}-F'_{2p}.\cos am(2pu)}=0; \\ z^{(2p)^2}+\dfrac{M''_{2p}-E''_{2p}.\Delta am(2pu)}{N''_{2p}-F''_{2p}.\Delta am(2pu)}.z^{(2p)^2-2}+\ldots. \\ \quad \ldots+\dfrac{H''_{2p}-B''_{2p}.\Delta am(2pu)}{N''_{2p}-F''_{2p}.\Delta am(2pu)}.z^2+\dfrac{G''_{2p}-A''_{2p}.\Delta am(2pu)}{N''_{2p}-F''_{2p}.\Delta am(2pu)}=0. \end{cases}$$

Les racines de la première des équations (3) seront les sinam des arguments α, pour lesquelles on a:
$\sin am((2p+1)\alpha) = \sin am((2p+1)u)$. Or cette équation donne en vertu des équations (3) du **24** les valeurs:

$$(2p+1)\alpha = (-1)^r.(2p+1)u+2rK+2siK',\ \alpha=(-1)^r.u+\frac{2rK+2siK'}{2p+1};$$

où r et s sont des nombres entiers quelconques. Donc on aura:

$$x = \sin am\left((-1)^r u+\frac{2rK+2siK'}{2p+1}\right) = (-1)^r \sin am\left(u+(-1)^r\frac{2rK+2siK'}{2p+1}\right).$$

Maintenant on peut toujours donner à r et s de telles valeurs que: $(-1)^r.r = n$, et $(-1)^r.s = m$, où n et m sont des nombres entiers quelconques, et on aura alors $(-1)^r = (-1)^n$. Donc la forme générale des racines de la prémière équation (3) sera:

$$(5) \qquad x = (-1)^n \sin am\left(u+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right),$$

où n et m sont des nombres entiers quelconques. Or pour avoir ici toutes les valeurs qui sont différentes entre elles, il suffit de donner à n et m des valeurs entières depuis $-p$ jusqu'à $+p$, et toutes ces valeurs, au nombre de $(2p+1)^2$, seront en général différentes entre elles. En effet, quels que soient les nombres entiers n et m, on peut toujours les réduire à la forme: $n = (2p+1).q+n'$, et $m = (2p+1).t+m'$, où q, t, n', m' sont des nombres entiers, et la valeur numérique de n' et m' ne dépasse pas p. En substituant ces valeurs on aura en vertu de la première des équations (8) du **22**:

$$x = (-1)^n.\sin am\left(u+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) =$$

$$= (-1)^{q+n'}.\sin am\left(u+\frac{2n'K+2m'iK'}{2p+1}+2qK+2tiK'\right) =$$

$$= (-1)^{n'}.\sin am\left(u+\frac{2n'K+2m'iK'}{2p+1}\right).$$

Cette équation ne diffère pas de l'équation (5) qu'en ce qu'on a n' et m' au lieu de n et m. Donc dans l'équation (5) il suffit de donner à n et m toutes les valeurs entières depuis $-p$ jusqu'à $+p$.

Toutes ces valeurs sont en général différentes entre elles. En effet, si pour une valeur quelconque de l'argument u et du module k deux de ces valeurs fussent égales:

$$(-1)^n.\sin am\left(u+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) = (-1)^{n'}.\sin am\left(u+\frac{2n'K+2m'iK'}{2p+1}\right),$$

où n, m, n', m' sont des nombres entiers depuis $-p$ jusqu'à $+p$, on aura suivant les équations (2) et (3) du **24**:

$$u + \frac{2nK + 2miK'}{2p+1} = (-1)^{r+n-n'}.(u + \frac{2n'K + 2m'iK'}{2p+1}) + 2rK + 2siK',$$

où r et s sont des nombres entiers quelconques. De là il suit que $r + n - n'$ doit être un nombre pair, et qu'on doit avoir: $n - n' = r(2p+1)$, $m - m' = s(2p+1)$, équations impossibles à moins que $r = o$, $s = o$, $n = n', m = m'$.

Donc en général toutes les racines de la première des équations (3), au nombre de $(2p+1)^2$, sont différentes entre elles, et elles seront toutes représentées par l'équation (5), si l'on y donne à n et à m successivement toutes les valeurs entières depuis $-p$ jusqu'à $+p$.

On voit facilement qu'au lieu de toutes les valeurs entières depuis $-p$ jusqu'à $+p$, on peut aussi mettre toutes les valeurs entières depuis o jusqu'à $2p+1$.

De même les racines de la seconde des équations (3) sont les cos am des arguments α, pour lesquelles on a $\cos am((2p+1)\alpha) = \cos am((2p+1)u)$. Or cette équation donne en vertu des équations (3) du **24**:

$$(2p+1)\alpha = \pm(2p+1)u + 2(2r+s)K + 2siK', \quad \alpha = \pm u + \frac{2(2r+s)K + 2siK'}{2p+1},$$

où r et s sont des nombres entiers quelconques. Donc on aura:

$$y = \cos am(\pm u + \frac{2(2r+s)K + 2siK'}{2p+1}) = \cos am(u \pm \frac{2(2r+s)K + 2siK'}{2p+1}).$$

Si l'on ajoute à l'argument du membre droit de cette équation $2qK$, où q est un nombre entier, il faut suivant la seconde équation (3) du **22** multiplier le cos am par $(-1)^q$, et on aura:

$$y = (-1)^q \cos am(u \pm \frac{2(2r+s)K + 2siK'}{2p+1} + 2qK) =$$

$$= (-1)^q \cos am(u + \frac{2(q(2p+1) \pm (2r+s))K \pm 2siK'}{2p+1}).$$

Maintenant on peut toujours donner à r, s, q de telles valeurs entières que: $q(2p+1) \pm (2r+s) = n$, $\pm s = m$, où n et m sont des nombres entiers quelconques, et on aura alors: $(-1)^q = (-1)^{n \mp s} = (-1)^{n-m} = (-1)^{n+m}$. Donc la forme générale des racines de la seconde des équations (3) sera:

$$(6) \qquad y = (-1)^{n+m} \cos am(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p+1}),$$

où l'on voit, de la même manière que plus haut, qu'il suffit de donner à n et m successivement toutes les valeurs entières depuis $-p$ jusqu'à $+p$, et que toutes les valeurs correspondantes de y au nombre de $(2p+1)^2$ seront en général différentes entre elles.

Enfin les racines de la troisième des équations (3) sont les Δ am des

arguments α, pour lesquelles on a: $\Delta\mathrm{am}\,((2p+1)\alpha) = \Delta\mathrm{am}\,((2p+)u)$ Or cette équation donne en vertu des formules (3) du **24**:

$$(2p+1)\alpha = \pm(2p+1)u + 2rK + 4siK,\quad \alpha = \pm u + \frac{2rK+4siK'}{2p+1},$$

où r et s sont des nombres entiers quelconques. Donc on aura:

$$z = \Delta\mathrm{am}\left(\pm u + \frac{2rK+4siK'}{2p+1}\right) = \Delta\mathrm{am}\left(u \pm \frac{2rK+4siK'}{2p+1}\right).$$

Si l'on ajoute à l'argument du membre droit de cette équation $2tiK'$, où t est un nombre entier, il faut suivant la troisième des équations (7) du **22** multiplier le $\Delta\mathrm{am}$ par $(-1)^t$, et on aura donc:

$$z = (-1)^t\,\Delta\mathrm{am}\,(u \pm \frac{2rK+4siK'}{2p+1} + 2tiK') =$$

$$= (-1)^t\Delta\mathrm{am}\left(u + \frac{\pm 2rK + 2(t(2p+1)\pm 2s)iK'}{2p+1}\right).$$

Maintenant on peut toujours donner à r, s, t de telles valeurs entières que: $\pm r = n$, $t(2p+1) \pm 2s = m$, où n et m sont des nombres entiers quelconques, et on aura alors: $(-1)^t = (-1)^m$. Donc la forme générale des racines de la troisième des équations (3) sera:

$$(7) \qquad z = (-1)^m\Delta\mathrm{am}\left(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right),$$

où il suffit de donner à n et m successivement toutes les valeurs entières depuis $-p$ jusqu'à $+p$, et où toutes les valeurs correspondantes de z en nombre de $(2p+1)^2$ seront en général différentes entre elles.

De la même manière on trouve, que la forme générale des racines de la première des équations (4) sera:

$$(8) \qquad x = \pm\sin\mathrm{am}\left(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p}\right)$$

où n et m sont des nombres entiers, et qu'il suffit de donner à n et m toutes les valeurs depuis $-(p-1)$ jusqu'à $+p$, ou depuis o jusqu'à $2p-1$, pour avoir toutes les racines au nombre de $2(2p)^2 = 8p^2$, lesquelles racines seront en général toutes différentes entre elles.

Les racines de la seconde des équations (4) seront de la forme:

$$(9) \qquad y = \pm\cos\mathrm{am}\left(u + \frac{2(2n+m)K + 2miK'}{2p}\right),$$

où n et m sont des nombres entiers, et il suffit de donner à n toutes les valeurs entières depuis $-\left(\frac{p-1}{2}\right)$ jusqu'a $+\frac{p}{2}$, et à m toutes les valeurs entières depuis $-(p-1)$ jusqu'à $+p$, ou à n toutes les valeurs entières depuis o jusqu'à $p-1$, et à m toutes les valeurs entières depuis o jusqu'à $2p-1$, pour avoir toutes les racines de cette équation au nombre de $4p^2$, lesquelles racines seront en général toutes différentes entre elles.

Enfin les racines de la troisième des équations (4) seront de la forme:

$$(10) \qquad z = \pm \Delta \operatorname{am}\left(u + \frac{2nK + 4miK'}{2p}\right),$$

où n et m sont des nombres entiers, et il suffit de donner à n toutes les valeurs entières depuis $-(p-1)$ jusqu'à $+p$, à m toutes les valeurs entières depuis $-\left(\frac{p-1}{2}\right)$ jusqu'à $+\frac{p}{2}$, ou à n toutes les valeurs entières depuis o jusqu'à $2p-1$, et à m toutes les valeurs entières depuis o jusqu'à $p-1$, pour avoir toutes les racines de cette équation au nombre de $4p^2$, lesquelles racines seront en général toutes différentes entre elles.

30. Des racines des formules (3) et (4) du paragraphe précédent on tire les valeurs des fonctions elliptiques de $(2p+1)u$ et de $2pu$ développées en produits ou en sommes. En effet dans une équation réduite à la forme normale des équations algébriques le produit des racines de l'équation est égal au coefficient du dernier terme avec son signe, si le nombre des racines est pair, avec le signe contraire, s'il est impair; et la somme des racines est égale au coefficient du second terme avec signe contraire. Donc on a, puisque $\prod_{-p}^{+p}(-1)^n = +1$:

$$\prod_{-p}^{+p}\prod_{-p}^{+p} \sin \operatorname{am}\left(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right) = \frac{A_{2p+1}}{N_{2p+1}} \cdot \sin \operatorname{am}((2p+1)u),$$

$$\prod_{-p}^{+p}\prod_{-p}^{+p} \cos \operatorname{am}\left(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right) = \frac{A'_{2p+1}}{N'_{2p+1}} \cdot \cos \operatorname{am}((2p+1)u),$$

$$\prod_{-p}^{+p}\prod_{-p}^{+p} \Delta \operatorname{am}\left(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right) = \frac{A''_{2p+1}}{N''_{2p+1}} \cdot \Delta \operatorname{am}((2p+1)u).$$

$$\prod_{-(p-1)}^{+p}\prod_{-(p-1)}^{+p} \sin^2 \operatorname{am}\left(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p}\right) = \frac{A^2_{2p}}{F^2_{2p}},$$

$$\prod_{\frac{-(p-1)}{2}}^{+p}\prod_{-(p-1)}^{+p} \cos^2 \operatorname{am}\left(u + \frac{2(2n+m)K + 2miK'}{2p}\right) = \frac{G'_{2p} - A'_{2p} \cdot \cos \operatorname{am}(2pu)}{N'_{2p} - F'_{2p} \cdot \cos \operatorname{am}(2pu)},$$

$$\prod_{-(p-1)}^{+p}\prod_{\frac{-(p-1)}{2}}^{+\frac{p}{2}} \Delta^2 \operatorname{am}\left(u + \frac{2nK + 4miK'}{2p}\right) = \frac{G''_{2p} - A''_{2p} \Delta \operatorname{am}(2pu)}{N''_{2p} - F''_{2p} \cdot \Delta \operatorname{am}(2pu)}.$$

$$\sum_{-p}^{+p}\sum_{-p}^{+p} (-1)^n \sin \operatorname{am}\left(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right) = \frac{F_{2p+1}}{N_{2p+1}} \cdot \sin \operatorname{am}((2p+1)u),$$

$$\sum_{-p}^{+p}\sum_{-p}^{+p} (-1)^{n+m} \cos \operatorname{am}\left(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right) = \frac{F'_{2p+1}}{N'_{2p+1}} \cdot \cos \operatorname{am}((2p+1)u),$$

$$\sum_{-p}^{+p}\sum_{-p}^{+p} (-1)^m \Delta \operatorname{am}\left(u + \frac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right) = \frac{F''_{2p+1}}{N''_{2p+1}} \cdot \Delta \operatorname{am}((2p+1)u).$$

De ces équations on trouve:

$$(1)\quad \begin{cases} \sin am((2p+1)u) = \dfrac{N_{2p+1}}{A_{2p+1}} \cdot \prod_{-p}^{+p} \prod_{-p}^{+p} \sin am\left(u + \dfrac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right), \\ \cos am((2p+1)u) = \dfrac{N'_{2p+1}}{A'_{2p+1}} \cdot \prod_{-p}^{+p} \prod_{-p}^{+p} \cos am\left(u + \dfrac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right), \\ \Delta am((2p+1)u) = \dfrac{N''_{2p+1}}{A''_{2p+1}} \cdot \prod_{-p}^{+p} \prod_{-p}^{+p} \Delta am\left(u + \dfrac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right), \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 1 = \dfrac{F^2_{2p}}{A^2_{2p-(p-1)-(p-1)}} \prod_{n}^{+p} \prod_{m}^{+p} \sin^2 am\left(u + \dfrac{2nK + 2miK'}{2p}\right), \\ \cos am(2pu) = \dfrac{N'_{2p} \cdot \prod_{\frac{(p-1)}{2}}^{+\frac{p}{2}} \prod_{-(p-1)}^{+p} \cos^2 am\left(u + \dfrac{2(2n+m)K + 2miK'}{2p}\right) - G'_{2p}}{F'_{2p} \cdot \prod_{\frac{(p-1)}{2}}^{+\frac{p}{2}} \prod_{-(p-1)}^{+p} \cos^2 am\left(u + \dfrac{2(2n+m)K + 2miK'}{2p}\right) - A'_{2p}}, \\ \Delta am(2pu) = \dfrac{N''_{2p} \prod_{-(p-1)}^{+p} \prod_{\frac{(p-1)}{2}}^{+\frac{p}{2}} \Delta^2 am\left(u + \dfrac{2nK + 4miK'}{2p}\right) - G''_{2p}}{F''_{2p} \prod_{-(p-1)}^{+p} \prod_{\frac{(p-1)}{2}}^{+\frac{p}{2}} \Delta^2 am\left(u + \dfrac{2nK + 4miK'}{2p}\right) - A''_{2p}}. \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \sin am((2p+1)u) = \dfrac{N_{2p+1}}{F_{2p+1}} \cdot \sum_{-p}^{+p} \sum_{-p}^{+p} (-1)^n \sin am\left(u + \dfrac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right), \\ \cos am((2p+1)u) = \dfrac{N'_{2p+1}}{F'_{2p+1}} \cdot \sum_{-p}^{+p} \sum_{-p}^{+p} (-1)^{n+m} \cos am\left(u + \dfrac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right), \\ \Delta am((2p+1)u) = \dfrac{N''_{2p+1}}{F''_{2p+1}} \cdot \sum_{-p}^{+p} \sum_{-p}^{+p} (-1)^m \Delta am\left(u + \dfrac{2nK + 2miK'}{2p+1}\right). \end{cases}$$

31. Les séries du paragraphe précédent peuvent être transformées en fonctions de sin am u, cos am u, et Δ am u. Nous considérons seulement le cas d'un facteur impair de l'argument u, et commencerons par les séries de facteurs.

Puisque on a en général:

$$\prod_{-p}^{+p} \prod_{-p}^{+p} f(n, m) = f(o, o) \cdot \prod_{1}^{p} f(n, o) \cdot f(-n, o) \cdot \prod_{1}^{p} f(o, m) \cdot f(o, -m) \cdot \prod_{1}^{p} \prod_{1}^{p} f(n, m) \cdot f(-n, -m) \cdot f(n, -m) \cdot f(-n, m),$$

on peut mettre les trois équations (1) du paragraphe précédent sous la forme suivante:

$$
(1)\quad
\begin{cases}
\operatorname{sin\,am}((2p+1)u) = \dfrac{N_{2p+1}}{A_{2p+1}} \cdot \operatorname{sin\,am} u \cdot \prod_1^p \operatorname{sin\,am}\left(u+\dfrac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \operatorname{sin\,am}\left(u-\dfrac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \\
\qquad \cdot \prod_1^p \operatorname{sin\,am}\left(u+\dfrac{2miK'}{2p+1}\right) \operatorname{sin\,am}\left(u-\dfrac{2miK'}{2p+1}\right) \cdot \\
\qquad \cdot \prod_1^p \prod_1^p \operatorname{sin\,am}\left(u+\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \operatorname{sin\,am}\left(u-\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \\
\qquad \cdot \operatorname{sin\,am}\left(u+\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right) \cdot \operatorname{sin\,am}\left(u-\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right); \\
\operatorname{cos\,am}((2p+1)u) = \dfrac{N'_{2p+1}}{A'_{2p+1}} \cdot \operatorname{cos\,am} u \cdot \prod_1^p \operatorname{cos\,am}\left(u+\dfrac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \operatorname{cos\,am}\left(u-\dfrac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \\
\qquad \cdot \prod_1^p \operatorname{cos\,am}\left(u+\dfrac{2miK'}{2p+1}\right) \cdot \operatorname{cos\,am}\left(u-\dfrac{2miK'}{2p+1}\right) \cdot \\
\qquad \cdot \prod_1^p \prod_1^p \operatorname{cos\,am}\left(u+\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \operatorname{cos\,am}\left(u-\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \\
\qquad \cdot \operatorname{cos\,am}\left(u+\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right) \cdot \operatorname{cos\,am}\left(u-\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right); \\
\Delta\operatorname{am}((2p+1)u) = \dfrac{N''_{2p+1}}{A''_{2p+1}} \cdot \Delta\operatorname{am} u \cdot \prod_1^p \Delta\operatorname{am}\left(u+\dfrac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \Delta\operatorname{am}\left(u-\dfrac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \\
\qquad \cdot \prod_1^p \Delta\operatorname{am}\left(u+\dfrac{2miK'}{2p+1}\right) \cdot \Delta\operatorname{am}\left(u-\dfrac{2miK'}{2p+1}\right) \cdot \\
\qquad \cdot \prod_1^p \prod_1^p \Delta\operatorname{am}\left(u+\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \Delta\operatorname{am}\left(u-\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \\
\qquad \cdot \Delta\operatorname{am}\left(u+\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right) \cdot \Delta\operatorname{am}\left(u-\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right).
\end{cases}
$$

Les coefficients de ces séries sont donnés par les équations (4), (6) et (8) du **28**:

$$
(2)\quad \frac{N_{2p+1}}{A_{2p+1}} = (-1)^p k^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}},\quad \frac{N'_{2p+1}}{A'_{2p+1}} = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}},\quad \frac{N''_{2p+1}}{A''_{2p+1}} = \frac{1}{k'^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}}}.
$$

On peut aussi trouver ces coefficients directement des équations précédentes. On divise alors la première de ces équations par $\operatorname{sin\,am} u$ et pose $u = o$, on divise la seconde équation par $\operatorname{cos\,am} u$ et pose $u = K$, enfin on divise la dernière par $\Delta\operatorname{am} u$ et pose $u = K + iK'$.

En remarquant alors comme dans **28** les limites:

$$
\lim_{u=o}\left(\frac{\operatorname{sin\,am}((2p+1)u)}{\operatorname{sin\,am} u}\right) = 2p+1,\quad \lim_{u=K}\left(\frac{\operatorname{cos\,am}((2p+1)u)}{\operatorname{cos\,am} u}\right) = (-1)^p(2p+1),
$$

$$
\lim_{u=K+iK'}\left(\frac{\Delta\operatorname{am}((2p+1)u)}{\Delta\operatorname{am} u}\right) = (-1)^p(2p+1),
$$

on trouve:

$$2p+1 = \frac{N_{2p+1}}{A_{2p+1}} \cdot \prod_1^p \sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \prod_1^p \sin^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right).$$

$$\cdot \prod_1^p \prod_1^p \sin^2 am\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \sin^2 am\left(\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right);$$

$$(-1)^p(2p+1) = \frac{N'_{2p+1}}{A'_{2p+1}} \cdot \prod_1^p \cos^2 am\left(K+\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \prod_1^p \cos^2 am\left(K+\frac{2miK'}{2p+1}\right).$$

$$\cdot \prod_1^p \prod_1^p \cos^2 am\left(K+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \cos^2 am\left(K+\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right);$$

$$(-1)^p(2p+1) = \frac{N''_{2p+1}}{A''_{2p+1}} \cdot \prod_1^p \Delta^2 am\left(K+iK'+\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \prod_1^p \Delta^2 am\left(K+iK'+\frac{2miK'}{2p+1}\right).$$

$$\cdot \prod_1^p \prod_1^p \Delta^2 am\left(K+iK'+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \Delta^2 am\left(K+iK'+\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right).$$

De là on tire les valeurs de $\frac{N_{2p+1}}{A_{2p+1}}$, $\frac{N'_{2p+1}}{A'_{2p+1}}$, $\frac{N''_{2p+1}}{A''_{2p+1}}$, et nous emploierons par préférence ces équations au lieu des équations (2) pour éliminer les coefficients ci-dessus des équations (1).

Comme digression nous ferons ici remarquer les équations suivantes, qui ne dépendent que du module k, et qu'on tire de la comparaison des équations (2) et (3):

$$(4) \quad (-1)^p \cdot \frac{2p+1}{k^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}}} = \prod_1^p \sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \prod_1^p \sin^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right).$$

$$\cdot \prod_1^p \prod_1^p \sin^2 am\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \sin^2 am\left(\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right);$$

$$(-1)^p(2p+1) \cdot \left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}} = \prod_1^p \cos^2 am\left(K+\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \prod_1^p \cos^2 am\left(K+\frac{2miK'}{2p+1}\right).$$

$$\cdot \prod_1^p \prod_1^p \cos^2 am\left(K+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \cos^2 am\left(K+\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right);$$

$$(-1)^p(2p+1) \cdot k'^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}} = \prod_1^p \Delta^2 am\left(K+iK'+\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \prod_1^p \Delta^2 am\left(K+iK'+\frac{2miK'}{2p+1}\right)$$

$$\cdot \prod_1^p \prod_1^p \Delta^2 am\left(K+iK'+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right) \cdot \Delta^2 am\left(K+iK'+\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right).$$

On peut réduire les deux dernières de ces équations à l'aide des formules (1) et (4) du **22**:

$$\cos am(K+u) = -k' \cdot \frac{\sin am\, u}{\Delta am\, u}, \quad \Delta am(K+iK'+u) = ik' \cdot \frac{\sin am\, u}{\cos am\, u}.$$

On aura alors:

$$(-1)^p(2p+1) \cdot \left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}} = k'^{2p} \cdot \prod_1^p \frac{\sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{\Delta^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)} \cdot k'^{2p} \cdot \prod_1^p \frac{\sin^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}{\Delta^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}.$$

$$\cdot k'^{4p^2}\prod_1^p\prod_1^p \frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}{\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}\cdot\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}{\Delta^2\,\mathrm{am}\left(\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)};$$

$$(-1)^p(2p+1)k'^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}}=(-1)^p k'^{2p}\cdot\prod_1^p\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}\cdot(-1)^p k'^{2p}\cdot\prod_1^p\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}{\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}$$

$$\cdot k'^{4p^2}\prod_1^p\prod_1^p\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}{\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}\cdot\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}{\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}.$$

De ces équations et de l'équation précédente (4) on tire enfin:

$$(5)\qquad \left(\frac{k'}{k}\right)^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}}=\prod_1^p\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)\cdot\prod_1^p\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right).$$

$$\cdot\prod_1^p\prod_1^p\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)\cdot\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right);$$

$$(6)\qquad k'^{\frac{(2p+1)^2-1}{2}}=\prod_1^p\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\prod_1^p\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right).$$

$$\cdot\prod_1^p\prod_1^p\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right).\Delta^2\,\mathrm{am}\left(\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right).$$

Nous retournons maintenant aux équations (1) et nous éliminerons les coefficients $\frac{N_{2p+1}}{A_{2p+1}}$, $\frac{N'_{2p+1}}{A'_{2p+1}}$, $\frac{N''_{2p+1}}{A''_{2p+1}}$ à l'aide des équations (3). On aura alors:

$$(7)\qquad \sin\mathrm{am}\,((2p+1)u)=(2p+1)\sin\mathrm{am}\,u.$$

$$\cdot\prod_1^p\frac{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK}{2p+1}\right).\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK}{2p+1}\right)}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot\prod_1^p\frac{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2miK'}{2p+1}\right).\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{2miK'}{2p+1}\right)}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot\prod_1^p\prod_1^p\frac{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right).\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right).\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}\cdot$$

(8) $\mathbf{cos\ am}\ ((2p+1)u) = (-1)^p(2p+1)\cos\mathrm{am}\,u\,.$

$$\cdot \prod_1^p{}_n \frac{\cos\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK}{2p+1}\right).\cos\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK}{2p+1}\right)}{\cos^2\mathrm{am}\left(K+\frac{2nK}{2p+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot \prod_1^p{}_m \frac{\cos\mathrm{am}\left(u+\frac{2miK'}{2p+1}\right).\cos\mathrm{am}\left(u-\frac{2miK'}{2p+1}\right)}{\cos^2\mathrm{am}\left(K+\frac{2miK'}{2p+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot \prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \frac{\cos\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK+2miK}{2p+1}\right).\cos\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}{\cos^2\mathrm{am}\left(K+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}$$

$$\cdot \frac{\cos\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right).\cos\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}{\cos^2\mathrm{am}\left(K+\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}\cdot$$

(9) $\mathbf{\Delta\ am}\ ((2p+1)u) = (-1)^p(2p+1).\Delta\,\mathrm{am}\,u\,.$

$$\cdot \prod_1^p{}_n \frac{\Delta\,\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK}{2p+1}\right).\Delta\,\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK}{2p+1}\right)}{\Delta^2\mathrm{am}\left(K+iK'+\frac{2nK}{2p+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot \prod_1^p{}_m \frac{\Delta\,\mathrm{am}\left(u+\frac{2miK'}{2p+1}\right).\Delta\,\mathrm{am}\left(u-\frac{2miK'}{2p+1}\right)}{\Delta^2\mathrm{am}\left(K+iK'+\frac{2miK'}{2p+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot \prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \frac{\Delta\,\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right).\Delta\,\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}{\Delta^2\,\mathrm{am}\left(K+iK'+\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot \frac{\Delta\,\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right).\Delta\,\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}{\Delta^2\mathrm{am}\left(K+iK'+\frac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}\cdot$$

On réduit maintenant ces formules à l'aide des formules (7), (8) et (9) du **10**:

$$\sin\mathrm{am}\,(u+v)\,.\,\sin\mathrm{am}\,(u-v) = \frac{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u.\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

$$\cos\mathrm{am}\,(u+v).\cos\mathrm{am}\,(u-v) = \frac{\cos^2\mathrm{am}\,v-\sin^2\mathrm{am}\,u.\Delta^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u.\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(u+v).\Delta\,\mathrm{am}\,(u-v) = \frac{\Delta^2\mathrm{am}\,v-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u.\cos^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u.\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

et des formules (1), (4) et (5) du **22**:

$$\operatorname{sin\,am}(K+v)=\frac{\operatorname{cos\,am} v}{\Delta\operatorname{am} v},\quad \operatorname{sin\,am}(K+iK'+v)=\frac{1}{k}\cdot\frac{\Delta\operatorname{am} v}{\operatorname{cos\,am} v},$$

$$\operatorname{sin\,am}(iK'+v)=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\operatorname{sin\,am} v}.$$

On aura de là:

$$\frac{\operatorname{sin\,am}(u+v)\cdot\operatorname{sin\,am}(u-v)}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} v}=-\frac{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} v}}{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}(iK'+v)}},$$

$$\frac{\operatorname{cos\,am}(u+v)\cdot\operatorname{cos\,am}(u-v)}{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}(K+v)}=\frac{\operatorname{cos}^2\operatorname{am} v}{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}(K+v)}\cdot\frac{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}(K+v)}}{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}(iK'+v)}},$$

$$\frac{\Delta\operatorname{am}(u+v)\cdot\Delta\operatorname{am}(u-v)}{\Delta^2\operatorname{am}(K+iK'+v)}=\frac{\Delta^2\operatorname{am} v}{\Delta^2\operatorname{am}(K+iK'+v)}\cdot\frac{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}(K+iK'+v)}}{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}(iK'+v)}},$$

et les formules précédentes seront par là réduites à:

$$\operatorname{sin\,am}((2p+1)u)=(2p+1)\cdot\operatorname{sin\,am} u\cdot$$

$$\cdot\prod_1^p{}_n\frac{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}\left(\dfrac{2nK}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}\left(iK'+\dfrac{2nK}{2p+1}\right)}}\cdot\prod_1^p{}_m\frac{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}\left(\dfrac{2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}\left(iK'+\dfrac{2miK'}{2p+1}\right)}}\cdot$$

$$\cdot\prod_1^p{}_n\prod_1^p{}_m\frac{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}\left(\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}\left(iK'+\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}}\cdot\frac{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}\left(\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u}{\operatorname{sin}^2\operatorname{am}\left(iK'+\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}};$$

$$\operatorname{cos\,am}((2p+1)u)=(-1)^p(2p+1)\cdot\prod_1^p{}_n\frac{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}\left(\dfrac{2nK}{2p+1}\right)}{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}\left(K+\dfrac{2nK}{2p+1}\right)}\cdot\prod_1^p{}_m\frac{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}\left(\dfrac{2miK'}{2p+1}\right)}{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}\left(K+\dfrac{2miK'}{2p+1}\right)}$$

$$\cdot\prod_1^p{}_n\prod_1^p{}_m\frac{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}\left(\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}\left(K+\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}\cdot\frac{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}\left(\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}{\operatorname{cos}^2\operatorname{am}\left(K+\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}.$$

$$\cdot \cos \operatorname{am} u \cdot \prod_{1}^{p}{}_{n} \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(K+\frac{2nK}{2p+1})}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(iK'+\frac{2nK}{2p+1})}} \cdot \prod_{1}^{p}{}_{m} \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(K+\frac{2miK'}{2p+1})}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(iK'+\frac{2miK'}{2p+1})}}.$$

$$\cdot \prod_{1}^{p}{}_{n} \prod_{1}^{p}{}_{m} \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(K+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(iK'+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}} \cdot \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(K+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(iK'+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})}};$$

$$\Delta \operatorname{am}((2p+1)u) = (-1)^p (2p+1) \cdot$$

$$\cdot \prod_{1}^{p}{}_{n} \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(\frac{2nK}{2p+1})}{\Delta^2 \operatorname{am}(K+iK'+\frac{2nK}{2p+1})} \cdot \prod_{1}^{p}{}_{m} \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}{\Delta^2 \operatorname{am}(K+iK'+\frac{2miK'}{2p+1})}.$$

$$\cdot \prod_{1}^{p}{}_{n} \prod_{1}^{p}{}_{m} \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}{\Delta^2 \operatorname{am}(K+iK'+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})} \cdot \frac{\Delta^2 \operatorname{am}(\frac{2nK-2miK'}{2p+1})}{\Delta^2 \operatorname{am}(K+iK'+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})}.$$

$$\cdot \Delta \operatorname{am} u \cdot \prod_{1}^{p}{}_{n} \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(K+iK'+\frac{2nK}{2p+1})}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(iK'+\frac{2nK}{2p+1})}} \cdot \prod_{1}^{p}{}_{m} \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(K+iK'+\frac{2miK'}{2p+1})}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(iK'+\frac{2miK'}{2p+1})}}$$

$$\cdot \prod_{1}^{p}{}_{n} \prod_{1}^{p}{}_{m} \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(K+iK'+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(iK'+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}} \cdot \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(K+iK'+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}(iK'+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})}}.$$

Si dans les deux dernières de ces équations on pose u = o, on trouvera:

$$1 = (-1)^p (2p+1) \cdot \prod_{1}^{p}{}_{n} \frac{\cos^2 \operatorname{am}(\frac{2nK}{2p+1})}{\cos^2 \operatorname{am}(K+\frac{2nK}{2p+1})} \cdot \prod_{1}^{p}{}_{m} \frac{\cos^2 \operatorname{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}{\cos^2 \operatorname{am}(K+\frac{2miK'}{2p+1})}.$$

$$\cdot \prod_{1}^{p}{}_{n} \prod_{1}^{p}{}_{m} \frac{\cos^2 \operatorname{am}(\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}{\cos^2 \operatorname{am}(K+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})} \cdot \frac{\cos^2 \operatorname{am}(\frac{2nK-2miK'}{2p+1})}{\cos^2 \operatorname{am}(K+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})};$$

$$1=(-1)^p(2p+1)\cdot\prod_1^p{}_n\frac{\Delta^2\mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})}{\Delta^2\mathrm{am}(K+iK'+\frac{2nK}{2p+1})}\cdot\prod_1^p{}_m\frac{\Delta^2\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}{\Delta^2\mathrm{am}(K+iK'+\frac{2miK'}{2p+1})}\cdot$$

$$\cdot\prod_1^p{}_n\prod_1^p{}_m\frac{\Delta\mathrm{am}(\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}{\Delta^2\mathrm{am}(K+iK'+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}\cdot\frac{\Delta^2\mathrm{am}(\frac{2nK-2miK'}{2p+1})}{\Delta^2\mathrm{am}(K+iK'+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})},$$

ce qu'on déduit aussi des formules (4), (5) et (6) en les divisant deux à deux.

On peut réduire les formules précédentes de $\sin\mathrm{am}((2p+1)u)$, $\cos\mathrm{am}((2p+1)u)$, $\Delta\mathrm{am}((2p+1)u)$ par les substitutions suivantes:

$$\sin\mathrm{am}(iK'+\frac{2nK}{2p+1})=\frac{1}{k\sin\mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})};\quad \sin\mathrm{am}(K+\frac{2miK'}{2p+1})=\frac{\cos\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}{\Delta\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})};$$

$$\sin\mathrm{am}(K+iK'+\frac{2nK}{2p+1})=\frac{1}{k}\cdot\frac{\Delta\mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})}{\cos\mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})};$$

$$\sin\mathrm{am}(K+iK'+\frac{2miK'}{2p+1})=\frac{1}{k}\cdot\frac{\Delta\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}{\cos\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})};$$

$$\sin\mathrm{am}(iK'+\frac{2miK'}{2p+1})=\sin\mathrm{am}(-iK'+\frac{2miK'}{2p+1})=-\sin\mathrm{am}(\frac{(2p+1-2m)iK'}{2p+1})=$$

$$=-\sin\mathrm{am}(\frac{(2s-1)iK'}{2p+1}),$$

où $p+1-m=s$. En remarquant ici que s varie de p à 1 en même temps que m varie de 1 à p, on trouvera, si l'on pose de nouveau m au lieu de s:

$$\prod_1^p{}_m\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}(iK'+\frac{2miK'}{2p+1})}\right)=\prod_1^p{}_m\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}}\right).$$

De même on trouvera que:

$$\prod_1^p{}_m\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}(iK'+\frac{2nK\mp2miK'}{2p+1})}\right)=\prod_1^p{}_m\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}(\frac{2nK\mp(2m-1)iK'}{2p+1})}\right);$$

$$\prod_1^p{}_n\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}(K+\frac{2nK}{2p+1})}\right)=\prod_1^p{}_n\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}(\frac{(2n-1)K}{2p+1})}\right),$$

$$\prod_1^p{}_n\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}(K+\frac{2nK\pm2miK'}{2p+1})}\right)=\prod_1^p{}_n\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}(\frac{(2n-1)K\mp2miK'}{2p+1})}\right);$$

$$\prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \left(1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(K + iK' + \frac{2nK \pm 2miK'}{2p+1})}\right) =$$

$$= \prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \left(1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{(2n-1)K \pm (2m-1)iK'}{2p+1})}\right);$$

En substituant ces valeurs on aura les équations suivantes:

(10) $\sin \mathrm{am}((2p+1)u) = (2p+1) \sin \mathrm{am}\, u .$

$$\cdot \prod_1^p{}_n \frac{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})}}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1}) . \sin^2 \mathrm{am}\, u} \cdot \prod_1^p{}_m \frac{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}}{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1})}} \cdot$$

$$\cdot \prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \frac{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK + 2miK'}{2p+1})}}{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK - (2m-1)iK'}{2p+1})}} \cdot \frac{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK - 2miK'}{2p+1})}}{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK + (2m-1)iK'}{2p+1})}} ;$$

(11) $\cos \mathrm{am}\, ((2p+1)u) =$

$$= \cos \mathrm{am}\, u \cdot \prod_1^p{}_n \frac{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{(2n-1)K}{2p+1})}}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1}) . \sin^2 \mathrm{am}\, u} \cdot \prod_1^p{}_m \frac{1 - \frac{\Delta^2 \mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}{\cos^2 \mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})} . \sin^2 \mathrm{am}\, u}{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1})}} \cdot$$

$$\cdot \prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \frac{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{(2n-1)K - 2miK'}{2p+1})}}{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK - (2m-1)iK'}{2p+1})}} \cdot \frac{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{(2n-1)K + 2miK'}{2p+1})}}{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK + (2m-1)iK'}{2p+1})}} ;$$

(12) $\Delta \mathrm{am}((2p+1)u) =$

$$= \Delta \mathrm{am}\, u \cdot \prod_1^p{}_n \frac{1 - k^2 \frac{\cos^2 \mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})}{\Delta^2 \mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})} \cdot \sin^2 \mathrm{am}\, u}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1}) . \sin^2 \mathrm{am}\, u} \cdot \prod_1^p{}_m \frac{1 - k^2 \frac{\cos^2 \mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}{\Delta^2 \mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})} . \sin^2 \mathrm{am}\, u}{1 - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1})}} \cdot$$

$$\prod_1^p\prod_1^p \frac{1-\frac{\sin^2 am\,u}{\sin^2 am\left(\frac{(2n-1)K+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}{1-\frac{\sin^2 am\,u}{\sin^2 am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} \cdot \frac{1-\frac{\sin^2 am\,u}{\sin^2 am\left(\frac{(2n-1)K-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}{1-\frac{\sin^2 am\,u}{\sin^2 am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}$$

32. Considérons maintenant les séries (3) du **30**. Puisque on a en général:

$$\sum_{-p}^{+p}\sum_{-p}^{+p} f(n,m) = f(o,o) + \sum_1^p\Big\{f(n,o)+f(-n,o)\Big\} + \sum_1^p\Big\{f(o,m)+f(o,-m)\Big\} +$$
$$+\sum_1^p\sum_1^p\Big\{f(n,m)+f(-n,m)+f(n,-m)+f(-n,m)\Big\},$$

on peut mettre les équations (3) du **30** sous la forme:

$$\sin am((2p+1)u) =$$
$$=\frac{N_{2p+1}}{F_{2p+1}}\Big\{\sin am\,u+\sum_1^p(-1)^n\Big(\sin am(u+\frac{2nK}{2p+1})+\sin am(u-\frac{2nK}{2p+1})\Big)+$$
$$+\sum_1^p\Big(\sin am\,(u+\frac{2miK'}{2p+1})+\sin am\,(u-\frac{2miK'}{2p+1})\Big)+$$
$$+\sum_1^p\sum_1^p(-1)^n\Big(\sin am\,(u+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})+\sin am\,(u-\frac{2nK+2miK'}{2p+1})+$$
$$+\sin am\,(u+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})+\sin am\,(u-\frac{2nK-2miK'}{2p+1})\Big)\Big\};$$

$$\cos am((2p+1)u) =$$
$$=\frac{N'_{2p+1}}{F'_{2p+1}}\Big\{\cos am\,u+\sum_1^p(-1)^n\Big(\cos am\,(u+\frac{2nK}{2p+1})+\cos am\,(u-\frac{2nK}{2p+1})\Big)+$$
$$+\sum_1^p(-1)^m\Big(\cos am\,(u+\frac{2miK'}{2p+1})+\cos am\,(u-\frac{2miK'}{2p+1})\Big)+$$
$$+\sum_1^p\sum_1^p(-1)^{n+m}\Big(\cos am\,(u+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})+\cos am(u-\frac{2nK+2miK'}{2p+1})+$$
$$+\cos am\,(u+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})+\cos am(u-\frac{2nK-2miK'}{2p+1})\Big)\Big\};$$

$$\Delta am((2p+1)u) =$$
$$=\frac{N''_{2p+1}}{F''_{2p+1}}\Big\{\Delta am\,u+\sum_1^p\Big(\Delta am\,(u+\frac{2nK}{2p+1})+\Delta am\,(u-\frac{2nK}{2p+1})\Big)+$$
$$+\sum_1^p(-1)^m\Big(\Delta am\,(u+\frac{2miK'}{2p+1})+\Delta am\,(u-\frac{2miK'}{2p+1})\Big)+$$
$$+\sum_1^p\sum_1^p(-1)^m\Big(\Delta am\,(u+\frac{2nK+2miK'}{2p+1})+\Delta am\,(u-\frac{2nK+2miK'}{2p+1})+$$
$$+\Delta am\,(u+\frac{2nK-2miK'}{2p+1})+\Delta am\,(u-\frac{2nK-2miK'}{2p+1})\Big)\Big\}.$$

Les coefficients de ces séries sont donnés par les équations (4), (6) et (8) du **28**:

$$\frac{N_{2p+1}}{F_{2p+1}} = \frac{1}{2p+1}, \quad \frac{N'_{2p+1}}{F'_{2p+1}} = \frac{(-1)^p}{2p+1}, \quad \frac{N''_{2p+1}}{F''_{2p+1}} = \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

On peut aussi les trouver immédiatement des séries précédentes, si l'on y pose $u = iK'$. En effet on a:

$$\text{sin am}(iK'+v) = \text{sin am}(-iK'+v) = -\text{sin am}(iK'-v),$$
$$\text{cos am}(iK'+v) = -\text{cos am}(-iK'+v) = -\text{cos am}(iK'-v),$$
$$\Delta\,\text{am}(iK'+v) = -\Delta\,\text{am}(-iK'+v) = -\Delta\,\text{am}(iK'-v),$$

donc: $\text{sin am}(iK'+v) + \text{sin am}(iK'-v) = 0$, $\text{cos am}(iK'+v) + \text{cos am}(iK'-v) = 0$,

$$\Delta\,\text{am}(iK'+v) + \Delta\,\text{am}(iK'-v) = 0.$$

Par conséquent on aura:

$$\frac{N_{2p+1}}{F_{2p+1}} = \lim_{u=iK'}\left\{\frac{\text{sin am}((2p+1)u)}{\text{sin am}\,u}\right\} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{v=0}\left\{\frac{\text{sin am}((2p+1)(iK'+v))}{\text{sin am}(iK'+v)}\right\} =$$

$$= \lim_{v=0}\left\{\frac{\text{sin am}(iK'+(2p+1)v)}{\text{sin am}(iK'+v)}\right\} = \lim_{v=0}\left\{\frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\text{sin am}((2p+1)v)}}{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\text{sin am}\,v}}\right\} =$$

$$= \lim_{v=0}\left\{\frac{\text{sin am}\,v}{\text{sin am}((2p+1)v)}\right\} = \frac{1}{2p+1};$$

$$\frac{N'_{2p+1}}{F'_{2p+1}} = \lim_{u=iK'}\left\{\frac{\text{cos am}((2p+1)u)}{\text{cos am}\,u}\right\} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{v=0}\left\{\frac{\text{cos am}((2p+1)(iK'+v))}{\text{cos am}(iK'+v)}\right\} =$$

$$= \lim_{v=0}\left\{\frac{(-1)^p\,\text{cos am}(iK'+(2p+1)v)}{\text{cos am}(iK'+v)}\right\} = (-1)^p \lim_{v=0}\left\{\frac{-\frac{i}{k}\cdot\frac{\Delta\,\text{am}((2p+1)v)}{\text{sin am}((2p+1)v)}}{-\frac{i}{k}\cdot\frac{\Delta\,\text{am}\,v}{\text{sin am}\,v}}\right\} =$$

$$= (-1)^p \lim_{v=0}\left\{\frac{\Delta\,\text{am}((2p+1)v)\cdot\text{sin am}\,v}{\Delta\,\text{am}\,v\cdot\text{sin am}(2p+1)v)}\right\} = \frac{(-1)^p}{2p+1};$$

$$\frac{N''_{2p+1}}{F''_{2p+1}} = \lim_{u=iK'}\left\{\frac{\Delta\,\text{am}((2p+1)u)}{\Delta\,\text{am}\,u}\right\} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{v=0}\left\{\frac{\Delta\,\text{am}((2p+1)(iK'+v))}{\Delta\,\text{am}(iK'+v)}\right\} =$$

$$= \lim_{v=0}\left\{\frac{(-1)^p\,\Delta\,\text{am}(iK'+(2p+1)v)}{\Delta\,\text{am}(iK'+v)}\right\} = (-1)^p \lim_{v=0}\left\{\frac{-i\cdot\frac{\text{cos am}((2p+1)v)}{\text{sin am}((2p+1)v)}}{-i\cdot\frac{\text{cos am}\,v}{\text{sin am}\,v}}\right\} =$$

$$= (-1)^p \lim_{v=0}\left\{\frac{\text{cos am}((2p+1)v)\cdot\text{sin am}\,v}{\text{cos am}\,v\cdot\text{sin am}((2p+1)v)}\right\} = \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

On remarque de plus qu'en vertu des équations (5) du **22** on a:

$$\text{sin am}\left(u \pm \frac{2miK'}{2p+1}\right) = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\text{sin am}\left(u \pm \frac{2miK'}{2p+1} \mp iK'\right)} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\text{sin am}\left(u \mp \frac{(2s-1)iK'}{2p+1}\right)},$$

$$\cos\mathrm{am}\left(u\pm\frac{2miK'}{2p+1}\right)=\mp\frac{i}{k}\cdot\frac{\Delta\mathrm{am}\left(u\pm\frac{2miK'}{2p+1}\mp iK'\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u\pm\frac{2miK'}{2p+1}\mp iK'\right)}=\mp\frac{i}{k}\cdot\frac{\Delta\mathrm{am}\left(u\mp\frac{(2s-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u\mp\frac{(2s-1)iK'}{2p+1}\right)}$$

$$\Delta\mathrm{am}\left(u\pm\frac{2miK'}{2p+1}\right)=\mp i\cdot\frac{\cos\mathrm{am}\left(u\pm\frac{2miK'}{2p+1}\mp iK'\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u\pm\frac{2miK'}{2p+1}\mp iK'\right)}=\mp i\cdot\frac{\cos\mathrm{am}\left(u\mp\frac{(2s-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u\mp\frac{(2s-1)iK'}{2p+1}\right)}$$

où $s=p+1-m$ varie de p à 1 en même temps que m varie de 1 à p. De plus on a: $(-1)^p.(-1)^m=-(-1)^s$ et $(-1)^p.(-1)^{n+m}=-(-1)^{n+s}$. Donc on aura, si l'on pose m au lieu de s:

$$\sin\mathrm{am}((2p+1)u)=\frac{1}{2p+1}\Big\{\sin\mathrm{am}\,u+\sum_1^p{}_n(-1)^n\Big(\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK}{2p+1}\right)+$$

$$+\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK}{2p+1}\right)\Big)+\frac{1}{k}\cdot\sum_1^p{}_m\Big(\frac{1}{\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+\frac{1}{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\Big)+$$

$$+\frac{1}{k}\sum_1^p{}_n\sum_1^p{}_m(-1)^n\Big(\frac{1}{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+\frac{1}{\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+$$

$$+\frac{1}{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+\frac{1}{\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\Big)\Big\},$$

$$\cos\mathrm{am}((2p+1)u)=\frac{1}{2p+1}\Big\{(-1)^p\cos\mathrm{am}\,u+(-1)^p\sum_1^p{}_n(-1)^n\Big(\cos\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK}{2p+1}\right)+$$

$$+\cos\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK}{2p+1}\right)\Big)+\frac{i}{k}\sum_1^p{}_m(-1)^m\Big(\frac{\Delta\mathrm{am}\left(u-\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}-\frac{\Delta\mathrm{am}\left(u+\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}$$

$$+\frac{i}{k}\sum_1^p{}_n\sum_1^p{}_m(-1)^{n+m}\Big(\frac{\Delta\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}-\frac{\Delta\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}-$$

$$-\frac{\Delta\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+\frac{\Delta\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\Big)\Big\},$$

$$\Delta\mathrm{am}((2p+1)u)=\frac{1}{2p+1}\Big\{(-1)^p\Delta\mathrm{am}\,u+(-1)^p\sum_1^p{}_n\Big(\Delta\mathrm{am}\left(u+\frac{2nK}{2p+1}\right)+$$

$$+\Delta\mathrm{am}\left(u-\frac{2nK}{2p+1}\right)\Big)+i\sum_1^p{}_m(-1)^m\Big(\frac{\cos\mathrm{am}\left(u-\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u-\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}-\frac{\cos\mathrm{am}\left(u+\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\Big)$$

$$+i\sum_1^p{}_n\sum_1^p{}_m(-1)^m\Big(\frac{\cos am\,(u+\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin am\,(u+\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1})}-\frac{\cos am(u-\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin am\,(u-\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1})}-$$

$$-\frac{\cos am\,(u+\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin am\,(u+\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}+\frac{\cos am(u-\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin am\,(u-\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}\Big)\Big\}.$$

On réduit maintenant ces formules à l'aide des formules: (1), (2), (3), (16), (27) et (33) du **10**:

$$\sin am\,(u+\frac{2nK}{2p+1})+\sin am\,(u-\frac{2nK}{2p+1})=\frac{2\sin am\,u.\cos am\,(\frac{2nK}{2p+1}).\Delta am(\frac{2nK}{2p+1})}{1-k^2\sin^2am\,(\frac{2nK}{2p+1}).\sin^2 am\,u},$$

$$\cos am\,(u+\frac{2nK}{2p+1})+\cos am(u-\frac{2nK}{2p+1})=\frac{2\cos am\,u\,.\cos am(\frac{2nK}{2p+1})}{1-k^2\sin^2am\,(\frac{2nK}{2p+1}).\sin^2am\,u},$$

$$\Delta am\,(u+\frac{2nK}{2p+1})+\Delta am(u-\frac{2nK}{2p+1})=\frac{2\Delta am\,u\,.\Delta am(\frac{2nK}{2p+1})}{1-k^2\sin^2am\,(\frac{2nK}{2p+1}).\sin^2am\,u},$$

$$\frac{1}{\sin am(u+v}+\frac{1}{\sin am\,(u-v)}=\frac{2\sin am\,u\,.\cos am\,v\,.\Delta am\,v}{\sin^2am\,u-\sin^2am\,v},$$

$$\frac{\Delta am\,(u+v)}{\sin am(u+v)}-\frac{\Delta am\,(u-v)}{\sin am\,(u-v)}=-\frac{2\cos am\,u\,.\sin am\,v\,.\Delta am\,v}{\sin^2 am\,u-\sin^2 am\,v},$$

$$\frac{\cos am\,(u+v)}{\sin am\,(u+v)}-\frac{\cos am(u-v)}{\sin am\,(u-v)}=-\frac{2\Delta am\,u\,.\sin am\,v\,.\cos am\,v}{\sin^2am\,u-\sin^2am\,v}.$$

On aura alors:

$$(1)\quad \sin am((2p+1)u)=\frac{\sin am\,u}{2p+1}\Big\{1+2\sum_1^p{}_n(-1)^n\frac{\cos am(\frac{2nK}{2p+1}).\Delta am(\frac{2nK}{2p+1})}{1-k^2\sin^2am(\frac{2nK}{2p+1}).\sin^2am\,u}+$$

$$+\frac{2}{k}\sum_1^p{}_m\frac{\cos am(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}).\Delta am(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin^2am\,u-\sin^2am(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1})}+$$

$$+\frac{2}{k}\sum_1^p\sum_1^p(-1)^n\left(\frac{\cos am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\,u-\sin^2 am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\,u-\sin^2 am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\right)\Bigg\}.$$

$$(2)\quad \cos am\,((2p+1)u)=\frac{\cos am\,u}{2p+1}\left\{(-1)^p+2(-1)^p.\sum_1^p(-1)^n\frac{\cos am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{1-k^2\sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)\sin^2 am\,u}+\right.$$

$$+\frac{2i}{k}\sum_1^p(-1)^m.\frac{\sin am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\,u-\sin^2 am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+$$

$$+\frac{2i}{k}\sum_1^p\sum_1^p(-1)^{m+n}.\left(\frac{\sin am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\,u-\sin^2 am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sin am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\,u-\sin^2 am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\right)\right\}.$$

$$(3)\quad \Delta am((2p+1)u)=\frac{\Delta am\,u}{2p+1}\left\{(-1)^p+2(-1)^p\sum_1^p\frac{\Delta am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{1-k^2\sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\sin^2 am\,u}+\right.$$

$$+2i\sum_1^p(-1)^m.\frac{\sin am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\cos am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\,u-\sin^2 am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+$$

$$+2i\sum_1^p\sum_1^p(-1)^m\left(\frac{\sin am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\cos am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\,u-\sin^2 am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sin am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\cos am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\,u-\sin^2 am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\right)\right\}.$$

Chapitre sixième.

Fonctions elliptiques des parties aliquotes de l'argument.

33. Pour trouver les valeurs des fonctions elliptiques des parties aliquotes $\frac{u}{n}$ de l'argument u, où n est un nombre entier, il suffit évidemment de les trouver dans le cas que n soit égal à 2, puis qu'il soit un nombre impair, puisque tout nombre entier n peut être mis sous la forme: $n = 2^r(2p+1)$.

Dans le cas de $n = 2$ on déduit les valeurs de $\sin am(\frac{u}{2})$, $\cos am(\frac{u}{2})$, $\Delta am(\frac{u}{2})$ en fonctions de $\sin amu$, $\cos amu$, et Δamu immédiatement des équations (6), (7) et (8) du **11**. Si l'on y pose $\frac{u}{2}$ au lieu de u, on aura:

$$(1)\quad \begin{cases} \sin am(\frac{u}{2}) = \pm\frac{1}{k}\sqrt{\frac{1-\Delta amu}{1+\cos amu}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos amu}{1+\Delta amu}}, \\ \cos am(\frac{u}{2}) = \pm\sqrt{\frac{\cos amu+\Delta amu}{1+\Delta amu}} = \pm\frac{k'}{k}\sqrt{\frac{1-\Delta amu}{\Delta amu-\cos amu}}, \\ \Delta am(\frac{u}{2}) = \pm\sqrt{\frac{\cos amu+\Delta amu}{1+\cos amu}} = \pm k'\sqrt{\frac{1-\cos amu}{\Delta amu-\cos amu}}, \end{cases}$$

Puisque à la même valeur de $\sin amu$ correspondent deux valeurs de $\cos amu$ et Δamu, à la même valeur de $\cos amu$ deux valeurs de Δamu, et à la même valeur de Δamu deux valeurs de $\cos amu$, ces équations donneront 8 valeurs de $\sin am(\frac{u}{2})$ en fonction de $\sin amu$, 4 valeurs de $\cos am(\frac{u}{2})$ en fonction de $\cos amu$, et 4 valeurs de $\Delta am(\frac{u}{2})$ en fonction de Δamu. Or les nombres de ces valeurs sont précisément les degrés des équations (4) du **29** pour $2p = 2$.

Si au lieu de $\sin amu$, $\cos amu$ ou Δamu, la valeur de l'argument u est donnée, on déterminera les signes des radicaux, si l'on fait converger le module k vers zéro, donc k' vers l'unité, K vers $\frac{\pi}{2}$, $\sin amu$ vers $\sin u$, $\cos amu$ vers $\cos u$ et Δamu vers $+1$, ou si l'on fait converger k vers l'unité, donc k' vers zéro, K' vers $\frac{\pi}{2}$, et suivant **19**: $\sin am(u, k) = -i.\frac{\sin am(iu,k')}{\cos am(iu,k')}$ vers: $-i.\frac{\sin(iu)}{\cos(iu)} = \frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}$, $\cos am(u,k) = \frac{1}{\cos am(iu,k')}$ vers $\frac{1}{\cos(iu)} = \frac{2}{e^u+e^{-u}}$, $\Delta am(u, k) = \frac{\Delta am(iu,k')}{\cos am(iu,k')}$ vers $\frac{1}{\cos(iu)} = \frac{2}{e^u+e^{-u}}$.

Nous ferons en particulier successivement $u = K$, $u = iK'$, $u = K \pm iK'$.

Si l'on pose $u = K$, on aura $\cos amu = 0$, $\Delta amu = k'$, donc:

$$(2)\quad \sin am\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-k'}}{k} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}};$$

$$\cos am\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}} = \frac{\sqrt{k'(1-k')}}{k},\quad \Delta am\left(\frac{K}{2}\right) = \sqrt{k'}.$$

Les signes sont ici déterminés par la considération que, si k tend vers zéro, k' tendra vers l'unité, K vers $\frac{\pi}{2}$, donc $\sin am\left(\frac{K}{2}\right)$ vers $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = +\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos am\left(\frac{K}{2}\right)$ vers $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\frac{1}{\sqrt{2}}$, et $\Delta am\left(\frac{K}{2}\right)$ vers $+1$.

Si l'on pose $u = iK'$, on aura en vertu du **25**: $\cos am\, u = \infty$, $\Delta am\, u = \infty$. Alors des deux dernières des équations (5) du 22 on tire:

$$\frac{\cos am(u+iK')}{\Delta am(u+iK')} = \frac{1}{k}\,\frac{\Delta am\, u}{\cos am\, u},$$

dont la limite pour $u = o$ sera: $\frac{\cos am(iK')}{\Delta am(iK')} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{k}$. Donc on aura:

(3) $\sin am\left(\frac{iK'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{k}}$, $\cos am\left(\frac{iK'}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$, $\Delta am\left(\frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{1+k}$.

Les signes des radicaux sont ici déterminés par la considération que si k tend vers l'unité, k' tendra vers zéro, K' vers $\frac{\pi}{2}$,

$$\sin am\left(\frac{iK'}{2}\right) = i\,\frac{\sin am\left(\frac{K'}{2}, k'\right)}{\cos am\left(\frac{K'}{2}, k'\right)} \text{ tendra vers: } i\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = +i,$$

$$\cos am\left(\frac{iK'}{2}, k\right) = \frac{1}{\cos am\left(\frac{K'}{2}, k'\right)} \text{ tendra vers: } \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = +\sqrt{2},$$

$$\text{et } \Delta am\left(\frac{iK'}{2}, k\right) = \frac{\Delta am\left(\frac{K'}{2}, k'\right)}{\cos am\left(\frac{K'}{2}, k'\right)} \text{ tendra vers } \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = +\sqrt{2}.$$

Enfin si l'on pose $u = K \pm iK'$, on aura en vertu du **21**: $\cos am\, u = \mp\frac{ik'}{k}$, $\Delta am\, u = o$. Donc on aura:

(4) $\sin am\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = \sqrt{1 \pm \frac{ik'}{k}}$, $\cos am\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = (1 \mp i)\sqrt{\frac{k'}{2k}}$,

$\Delta am\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = k'\sqrt{1 \pm \frac{ik}{k'}}$.

Le signe de la première de ces équations est déterminé par la considération que, si k tend vers l'unité, k' tendra vers zéro, $\sin am\left(\frac{K}{2}\right)$ vers $+1$, $\cos am\left(\frac{K}{2}\right)$ vers zéro, $\sin am\left(\frac{iK'}{2}\right)$ vers $+i$, $\cos am\left(\frac{iK'}{2}\right)$ vers $+\sqrt{2}$, $\Delta am\left(\frac{iK'}{2}\right)$ vers $+\sqrt{2}$, donc $\sin am\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right)$ vers $+1$. Les signes des deux dernières équations sont déterminés par la considération que si k est réelle, plus petit que l'unité et tend vers l'unité, k' sera réelle et tendra vers zéro, $\sin am\left(\frac{K}{2}\right)$ tendra vers $+1$, $\cos am\left(\frac{K}{2}\right)$ et $\Delta am\left(\frac{K}{2}\right)$ tendront vers $+\sqrt{k'}$, $\sin am\left(\frac{iK'}{2}\right)$ vers $+i$, $\cos am\left(\frac{iK'}{2}\right)$ et $\Delta am\left(\frac{iK'}{2}\right)$ vers $+\sqrt{2}$, donc $\cos am\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right)$ et $\Delta am\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right)$ tendront tous les deux vers $\frac{(1 \mp i)\sqrt{2k'}}{2} = (1 \mp i)\sqrt{\frac{k'}{2}} = \sqrt{k'}\cdot\sqrt{\mp i}$.

34. Supposons maintenant que le diviseur de l'argument u soit un nombre impair $2p+1$. Si l'on pose $x = \sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$, les valeurs de x, qui en nombre de $(2p+1)^2$ en général toutes sont différentes entre elles, seront suivant le paragraphe **29**, où l'on pose $\frac{u}{2p+1}$ au lieu de u, représentées par la formule:

$$x = (-1)^n \sin am\left(\frac{u + 2nK + 2miK'}{2p+1}\right),$$

et il suffira de donner ici à n et m toutes les valeurs entières depuis — p jusqu'à + p, ou depuis zéro jusqu'à 2p, pour avoir toutes les valeurs de x.

Ces valeurs peuvent toutes être exprimées algébriquement en fonctions de $\sin am\, u$, de $\sin am\left(\frac{2K}{2p+1}\right)$, de $\sin am\left(\frac{2iK'}{2p+1}\right)$, des $(2p+1)^{\text{ièmes}}$ racines de $+1$ et de -1.

En effet soit α une valeur quelconque de $((-1))^{\frac{1}{2p+1}}$, et β une valeur quelconque de $((1))^{\frac{1}{2p+1}}$, et posons:

$$\sum_{-p}^{+p}\sum_{-p}^{+p} \alpha^r \beta^s \sin am\left(\frac{u + 2rK + 2siK'}{2p+1}\right) = \varphi,$$

$$\sum_{-p}^{+p}\sum_{-p}^{+p} \alpha^r \beta^s \sin am\left(\frac{u - 2rK - 2siK'}{2p+1}\right) = \psi.$$

Or on a:

$$\sin am\left(\frac{u \pm (2rK + 2siK')}{2p+1}\right) =$$

$$= \frac{\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right).\cos am\left(\frac{2rK+2siK'}{2p+1}\right) \pm \sin am\left(\frac{2rK+2siK'}{2p+1}\right).\cos am\left(\frac{u}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{1 - k^2 \sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right).\sin^2 am\left(\frac{2rK+2siK'}{2p+1}\right)}$$

De plus les fonctions elliptiques de $\frac{2rK+2siK'}{2p+1}$ sont des fonctions rationelles des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p+1}$, et de $\frac{2iK'}{2p+1}$. Donc on aura:

$\sin am\left(\frac{u \pm (2rK+2siK')}{2p+1}\right) = a \pm b \,.\, \cos am\left(\frac{u}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$, où a et b sont des fonctions rationelles de $\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$, et des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p+1}$ et de $\frac{2iK'}{2p+1}$. Donc enfin on aura:

$$\varphi = A + B \,.\, \cos am\left(\frac{u}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right),$$

$$\psi = A - B \,.\, \cos am\left(\frac{u}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right),$$

où A et B sont des fonctions rationelles de $\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$, des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p+1}$ et de $\frac{2iK'}{2p+1}$, de α et de β.

Si l'on élève ces deux expressions à la puissance $2p+1$, on aura:

$$\varphi^{2p+1} = U + V \,.\, \cos am\left(\frac{u}{2p+1}\right) \,.\, \Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right),$$

$$\psi^{2p+1} = U - V \,.\, \cos am\left(\frac{u}{2p+1}\right) \,.\, \Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$$

où U et V sont de même des fonctions rationelles de $\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$, des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p+1}$ et de $\frac{2iK'}{2p+1}$, de α et de β.

De là on trouve:

$\varphi^{2p+1} \,.\, \psi^{2p+1} = U^2 - V^2 \cos^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right) \,.\, \Delta^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right) = X,$

$\varphi^{2p+1} + \psi^{2p+1} = 2\,U,$

où X est une fonction rationelle de $\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$, des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p+1}$ et de $\frac{2iK'}{2p+1}$, de α et de β.

Maintenant, si l'on remplace $\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$ par une autre des racines de la première des équations (3) du **29**, dans laquelle on pose $\frac{u}{2p+1}$ au lieu de u, φ^{2p+1} et ψ^{2p+1} ne changeront pas de valeur. En effet, si dans la somme:

$$\varphi = \sum_{-p}^{+p} \sum_{-p}^{+p} \alpha^r \beta^s \sin am\left(\frac{u + 2rK + 2siK'}{2p+1}\right),$$

on pose $u + 2K$ an lieu de u, le terme:

$\alpha^r \beta^s \sin am\left(\frac{u + 2rK + 2siK'}{2p+1}\right)$ sera changée en: $\frac{1}{\alpha}\left(\alpha^{p+1} \beta^s \sin am\left(\frac{u + 2(r+1)K + 2siK'}{2p+1}\right.\right.$

et $\alpha^p \beta^s \sin am\left(\frac{u + 2pK + 2siK'}{2p+1}\right)$ en $\frac{1}{\alpha}\left(\alpha^{p+1} \beta^s \,.\, \sin am\left(\frac{u + 2(p+1)K + 2siK'}{2p+1}\right)\right) =$

$= \frac{1}{\alpha}\left(\alpha^{p+1} \beta^s \sin am\left(\frac{u - 2pK + 2siK'}{2p+1} + 2K\right)\right) = \frac{1}{\alpha}\left(-\alpha^{p+1} \beta^s \sin am\left(\frac{u - 2pK + 2siK'}{2p+1}\right)\right) =$

$= \frac{1}{\alpha}\left(\alpha^{-p} \beta^s \sin am\left(\frac{u - 2pK + 2siK'}{2p+1}\right)\right),$

puisque: $\alpha^{2p+1} = -1$, donc $-\alpha^{p+1} = \alpha^{-p}$. Donc la somme φ sera changée en $\frac{\varphi}{\alpha}$. De même si l'on pose $u + 2iK'$ au lieu de u, φ sera changée en $\frac{\varphi}{\beta}$. Donc enfin si l'on pose $u + 2nK + 2miK'$ au lieu de u, φ sera changée en $\frac{\varphi}{\alpha^n \,.\, \beta^m}$, et si l'on pose:

$(-1)^n \sin am\left(\frac{u + 2nK + 2miK'}{2p+1}\right)$ au lieu de $\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$, φ sera changée en $\frac{(-1)^n}{\alpha^n \,.\, \beta^s}$

Par la même substitution ψ sera changée en $\frac{(-1)^n \psi}{\alpha^n \,.\, \beta^m}$.

Or on a: $\alpha^{2p+1} = -1$, $\beta^{2p+1} = +1$, donc: $\left(\frac{(-1)^n}{\alpha^n \,.\, \beta^m}\right)^{2p+1} = +1$. Donc φ^{2p+1} et ψ^{2p+1} resteront invariables, si l'on remplace $\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)$ par $(-1)^n \sin am\left(\frac{u + 2nK + 2miK'}{2p+1}\right)$, c'est-à-dire par une quelconque des autres raci-

cines de la première des équations (3) du **29**. Donc enfin φ^{2p+1} et ψ^{2p+1} sont des fonctions rationelles et symétriques des racines de cette équation.

Mais une fonction rationelle et symétrique des racines d'une équation algébrique est une fonction rationelle des coefficients de cette équation. Or les coefficients de la première des équations (3) du **29**, dans laquelle on pose $\frac{u}{2p+1}$ au lieu de u, sont des fonctions rationelles de k^2 et de sin am u, donc φ^{2p+1} et ψ^{2p+1} sont des fonctions rationelles de k^2 et de sin am u. Donc: $\varphi^{2p+1}.\psi^{2p+1} = X$, et $\varphi^{2p+1} + \psi^{2p+1} = 2\,U$ seront des fonctions rationelles de sin am u, de k^2, des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p+1}$ et de $\frac{2iK'}{2p+1}$, de α et de β.

De ces équations on trouve enfin:

$$\varphi = \sqrt[2p+1]{U + \sqrt{U^2 - X}},\quad \psi = \sqrt[2p+1]{U - \sqrt{U^2 - X}}.$$

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}$ les $2p+1$ valeurs diverses de $((-1))^{\frac{1}{2p+1}}$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2p+1}$ les $2p+1$ valeurs diverses de $((1))^{\frac{1}{2p+1}}$, et désignons par $U_{n,m}$, $X_{n,m}$, $\varphi_{n,m}$, $\psi_{n,m}$ les valeurs des fonctions U, X, φ et ψ, quand on y remplace α par α_n et β par β_m. On aura alors:

$$\varphi_{n,m} = \sum_{-p}^{+p}{}_r \sum_{-p}^{+p}{}_s \alpha_n^r \beta_m^s \sin am\left(\frac{u + 2rK + 2siK'}{2p+1}\right) = \sqrt[2p+1]{U_{n,m} + \sqrt{U_{n,m}^2 - X_{n,m}}}.$$

Si l'on fait maintenant la somme de toutes les $\varphi_{n,m}$, au nombre de $(2p+1)^2$, on aura:

$$\sum_1^{2p+1}{}_n \sum_1^{2p+1}{}_m \varphi_{n,m} = \sum_{-p}^{+p}{}_r \sum_{-p}^{+p}{}_s \left\{\sin am\left(\frac{u + 2rK + 2siK'}{2p+1}\right) . \sum_1^{2p+1}{}_n \alpha_n^r . \sum_1^{2p+1}{}_m \beta_m^s\right\}.$$

Mais $\sum_1^{2p+1}{}_n \alpha_n^r$, ou la somme des $r^{ièmes}$ puissances de toutes les racines de l'équation $\alpha^{2p+1} = -1$, se réduit à zéro pour toute valeur de r, exceptée $r = o$, pour laquelle elle devient égale à $2p+1$. De même $\sum_1^{2p+1}{}_m \beta_m^s$, ou la somme des $s^{ièmes}$ puissances de toutes les racines de l'équation $\beta^{2p+1} = 1$ se réduit à zéro pour toute valeur de s, exceptée $s = o$, pour laquelle elle se réduit à $2p+1$. Donc on aura:

$$\sum_1^{2p+1}{}_n \sum_1^{2p+1}{}_m \varphi_{n,m} = (2p+1)^2 \sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right),$$

et de là:

$$\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right) = \frac{1}{(2p+1)^2} \sum_1^{2p+1}{}_n \sum_1^{2p+1}{}_m \varphi_{n,m} =$$

$$= \frac{1}{(2p+1)^2} \sum_1^{2p+1}{}_n \sum_1^{2p+1}{}_m \sqrt[2p+1]{U_{n,m} + \sqrt{U_{n,m}^2 - X_{n,m}}}$$

où $U_{n,m}$ et $X_{n,m}$ sont des fonctions rationelles de sin am u, de k^2, des $(2p+1)^{ièmes}$ racines de -1 et de $+1$, et des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p+1}$ et de $\frac{2iK'}{2p+1}$.

Une des valeurs de α_n est -1, et une des valeurs de β_m est $+1$. Or pour ces valeurs on a:

$$\varphi_{n,m} = \sum_{-p}^{+p}\sum_{-p}^{+p} (-1)^r \operatorname{sin am}\left(\frac{u+2rK+2siK'}{2p+1}\right),$$

donc égale à la somme des racines de la première des équations (3) du **29**:

$$x^{(2p+1)^2} - \frac{F_{2p+1}}{N_{2p+1}} \operatorname{sin am} u \cdot x^{(2p+1)^2-1} + \frac{M_{2p+1}}{N_{2p+1}} x^{(2p+1)^2-2} + \ldots + \frac{G_{2p+1}}{N_{2p+1}} x - \frac{A_{2p+1}}{N_{2p+1}} \operatorname{sin am} u = 0.$$

Mais la somme des racines de cette équation est égale à $\frac{F_{2p+1}}{N_{2p+1}} \operatorname{sin am} u$, et puisque suivant les formules (4) du **28** on a: $\frac{F_{2p+1}}{N_{2p+1}} = 2p+1$, on aura pour $\alpha_n = -1$, $\beta_m = +1$: $\varphi_{n,m} = \sqrt[2p+1]{U_{n,m} + \sqrt{U_{n,m}^2 - X_{n,m}}} + \sqrt[2p+1]{U_{n,m} - \sqrt{U_{n,m}^2 - X_{n,m}}} = (2p+1) \operatorname{sin am} u$.

De la valeur de $\operatorname{sin am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)$ en fonction algébrique de $\operatorname{sin am} u$ on peut déduire les valeurs de $\operatorname{cos am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)$ et de $\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)$. On peut aussi les trouver directement et sous une forme plus simple de la même manière qu'on vient de trouver la valeur de $\operatorname{sin am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)$. Pour trouver $\operatorname{cos am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)$ en fonction algébrique de $\operatorname{cos am} u$ il faut alors poser:

$\varphi = \sum_{-p}^{+p}\sum_{-p}^{+p} \alpha^r \beta^s \operatorname{cos am}\left(\frac{u+2rK+2siK'}{2p+1}\right)$ où α et β sont deux valeurs quelconques de $((-1))^{\frac{1}{2p+1}}$, et pour trouver $\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)$ en fonction algébrique de $\Delta\operatorname{am} u$ il faut poser:

$\varphi = \sum_{-p}^{+p}\sum_{-p}^{+p} \alpha^r \beta^s \Delta\operatorname{am}\left(\frac{u+2rK+2siK'}{2p+1}\right)$, où α est une valeur quelconque de $((1))^{\frac{1}{2p+1}}$ et β une valeur de $((-1))^{\frac{1}{2p+1}}$.

35. Il s'agit maintenant de trouver les valeurs des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p+1}$ et de $\frac{2iK'}{2p+1}$. Or on peut se borner à considérer le cas où $2p+1$ est un nombre premier. En effet si $(2p+1) = (2p'+1).(2p''+1).(2p'''+1)\ldots$ où $2p'+1$, $2p''+1$, $2p'''+1$, ... sont des nombres premiers, on aura $\frac{2K}{2p+1} = \frac{\frac{2K}{(2p''+1)(2p'''+1)..}}{2p'+1}$, et on trouvera suivant le paragraphe précédent les fonctions elliptiques de cet argument en fonctions algébriques des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{(2p''+1)(2p'''+1)....}$, des $(2p'+1)^{\text{ièmes}}$ racines de -1 et de $+1$, et des fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p'+1}$ et de $\frac{2iK'}{2p'+1}$; et ainsi de suite. Nous supposerons donc $2p+1$ un nombre premier.

Les fonctions $\operatorname{sin am}\left(\frac{2K}{2p+1}\right)$ et $\operatorname{sin am}\left(\frac{2iK'}{2p+1}\right)$ sont, la première au signe près, deux des racines de l'équation $\operatorname{sin am}((2p+1)u) = 0$, ou suivant **29** de l'équation:

$$x^{(2p+1)^2} + \frac{M_{2p+1}}{N_{2p+1}} x^{(2p+1)^2-2} + \ldots + \frac{G_{2p+1}}{N_{2p+1}} x = 0.$$

La forme générale des racines de cette équation est:

$x = (-1)^n \sin am\left(\frac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)$, et on aura toutes les racines différentes en nombre du $(2p+1)^2$, si l'on donne à n et m toutes les valeurs entières depuis $-p$ jusqu'à $+p$. Une de ces racines, qui répond à $n = o$ et $m = o$, est égale à zéro. On écartera ce facteur en divisant l'équation précédente par x. Si de plus on pose $x^2 = \xi$, on aura l'équation suivante du degré $\frac{(2p+1)^2-1}{2} = 2p^2+2p$ en ξ:

$$(1) \qquad \xi^{2p^2+2p} + \frac{M_{2p+1}}{N_{2p+1}}\xi^{2p^2+2p-1} + \ldots\ldots + \frac{G_{2p+1}}{N_{2p+1}} = o,$$

dont les racines sont de la forme: $\xi = \sin^2 am\left(\frac{2nK \pm 2miK'}{2p+1}\right)$. On aura toutes les racines différentes de cette équation, si l'on donne à n et m toutes les valeurs entières depuis o jusqu'à p, à l'exception des valeurs coïncidentes $n = o$ et $m = o$.

Or la résolution de l'équation (1) peut être ramenée à celle de deux équations l'une du degré p, l'autre du degré $2p+2$.

D'abord on remarque que les racines de l'équation (1) peuvent être représentées par les trois formes: $\sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)$, $\sin^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)$ et $\sin^2 am\left(m.\frac{2nK \pm 2iK'}{2p+1}\right)$, où l'on donne à n et m toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à p.

En effet toute valeur $\xi = \sin^2 am\, u$, dont l'argument u satisfait à l'équation: $\sin am((2p+1)u) = o$, est racine de l'équation (1). Donc $\sin am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)$ et $\sin am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)$ représente chacun un nombre p de valeurs différentes de ξ. Les autres valeurs en nombre de $2p^2$ seront représentées par $\sin^2 am\left(m.\frac{2nK \pm 2iK'}{2p+1}\right)$; car aucune de ces dernières valeurs ne coïncident pas avec les valeurs précédentes: $\sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)$ et $\sin^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)$, et on peut démontrer qu'elles sont en général toutes différentes entre elles. En effet, si l'on avait pour une valeur quelconque du module k:

$$\sin^2 am\left(m.\frac{2nK \pm 2iK'}{2p+1}\right) = \sin^2 am\left(m'.\frac{2n'K \pm 2iK'}{2p+1}\right),$$

il faudrait en vertu du **24** qu'on eût:

$$m.\frac{2nK \pm 2iK'}{2p+1} = 2rK + 2siK' \pm m'.\frac{2n'K \pm 2iK'}{2p+1},$$

ou: $2(mn \pm m'n')K \pm 2(m \pm m')iK' = 2r(2p+1)K + 2s(2p+1)iK'$, où r et s sont des nombres entiers quelconques et les signes doubles sont indépendants l'un de l'autre. Or si cette équation avait lieu pour une valeur quelconque du module k, il faudrait qu'on eût séparément:

$m \pm m' = s(2p+1)$, et $mn \pm m'n' = r(2p+1)$. Mais puisque m et m' sont des nombres entiers depuis 1 jusqu'à p, $m \pm m'$ est moindre que $2p+1$, donc pour que $m \pm m' = s(2p+1)$, il faudrait avoir le signe inférieur, $m = m'$, et $s = o$. La seconde des équations précédentes deviendra alors: $m(n \pm n') = r(2p+1)$, ce qui est impossible, puisque m et $n \pm n'$ sont toutes les deux des nombres entiers moindres que $2p+1$ qui est un nombre premier; à moins qu'on a le signe inférieur, que $n = n'$ et $r = o$, dans lequel cas les deux valeurs: $m \cdot \frac{2nK \pm 2iK'}{2p+1}$ et $m' \cdot \frac{2n'K \pm 2iK'}{2p+1}$ coïncident.

Donc toutes les racines de l'équation (1) seront représentées par les valeurs:

$$\xi_n = \sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right), \xi'_m = \sin^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right),$$

$$\xi_{n,m} = \sin^2 am\left(m \cdot \frac{2nK+2iK'}{2p+1}\right), \xi'_{n,m} = \sin^2 am\left(m \cdot \frac{2nK-2iK'}{2p+1}\right),$$

où l'on donne à n et m toutes les valeurs entières depuis 1 jusqu'à p, et ces valeurs seront en général toutes différentes entre elles.

Soit maintenant X une fonction quelconque symétrique et rationelle des quantités:

$$\sin^2 am\, u,\ \sin^2 am(2u),\ \sin^2 am(3u),\ \ldots\ldots\ \sin^2 am(pu).$$

Puisque on peut exprimer $\sin^2 am(nu)$, où n est un nombre entier, en fonction rationelle de $\sin^2 am\, u$, la fonction X sera une fonction rationelle de $\sin^2 am\, u$: $X = F(\sin^2 am\, u)$, et on aura, puisque elle est une fonction symétrique des valeurs précédentes:

$F(\sin^2 am\, u) = F(\sin^2 am(2u)) = F(\sin^2 am(3u)) = \ldots = F(\sin^2 am(pu))$

où u est une quantité quelconque.

Si l'on pose au lieu de u successivement

$$\frac{2K}{2p+1},\ \frac{2iK'}{2p+1},\ \frac{2K+2iK'}{2p+1},\ \frac{4K+2iK'}{2p+1},\ \ldots\ \frac{2pK+2iK'}{2p+1},\ \frac{2K-2iK'}{2p+1},$$

$$\frac{4K-2iK'}{2p+1},\ \ldots\ \frac{2pK-2iK'}{2p+1},$$ on aura donc:

(2)
$$\begin{cases}
F(\xi_1) = F(\xi_2) = F(\xi_3) = \ldots\ldots = F(\xi'_p), \\
F(\xi'_1) = F(\xi'_2) = F(\xi'_3) = \ldots\ldots = F(\xi'_p), \\
F(\xi_{1,1}) = F(\xi_{1,2}) = F(\xi_{1,3}) = \ldots\ldots = F(\xi_{1,p}), \\
F(\xi_{2,1}) = F(\xi_{2,2}) = F(\xi_{2,3}) = \ldots\ldots = F(\xi_{2,p}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F(\xi_{p,1}) = F(\xi_{p,2}) = F(\xi_{p,3}) = \ldots\ldots = F(\xi_{p,p}), \\
F(\xi'_{1,1}) = F(\xi'_{1,2}) = F(\xi'_{1,3}) = \ldots\ldots = F(\xi'_{1,p}), \\
F(\xi'_{2,1}) = F(\xi'_{2,2}) = F(\xi'_{2,3}) = \ldots\ldots = F(\xi'_{2,p}), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F(\xi'_{p,1}) = F(\xi'_{p,2}) = F(\xi'_{p,3}) = \ldots\ldots = F(\xi'_{p,p}).
\end{cases}$$

Si l'on forme maintenant l'équation:

$$(x-F(\xi_1)).(x-F(\xi'_1)).(x-F(\xi_{1,1})).(x-F(\xi_{2,1})).\ldots\ldots(x-F(\xi_{p,1})).$$
$$.(x-F(\xi'_{1,1})).(x-F(\xi'_{2,1})).\ldots\ldots(x-F(\xi'_{p,1}))=$$
$$= x^{2p+2}+q_{2p+1}x^{2p+1}+q_{2p}x^{2p}+\ldots\ldots+q_1x+q_0,$$

les coefficients $q_0, q_1, \ldots q_{2p+1}$ seront des fonctions rationelles et symétriques de:

$F(\xi_1), F(\xi'_1), F(\xi_{1,1}), F(\xi_{2,1}) \ldots F(\xi_{p,1}), F(\xi'_{1,1}), F(\xi'_{2,1}) \ldots F(\xi'_{p,1})$.

Or on peut les exprimer en fonctions rationelles du module k. En effet une fonction quelconque rationelle et symétrique des $2p+2$ quantités précédentes, est une fonction rationelle des quantités:

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_{2p+2}$, où:

$$\rho_k=(F(\xi_1))^k+(F(\xi'_1))^k+(F(\xi_{1,1}))^k+(F(\xi_{2,1}))^k+\ldots+(F(\xi_{p,1}))^k+$$
$$+(F(\xi'_{1,1}))^k+(F(\xi'_{2,1})^k+\ldots+(F(\xi'_{p,1}))^k,$$

et en vertu des équations (2) on a:

$$(F(\xi_1))^k+(F(\xi'_1))^k+\sum_1^p{}_n\left\{(F(\xi_{n,1}))^k+(F(\xi'_{n,1}))^k\right\}=$$
$$=(F(\xi_2))^k+(F(\xi'_2))^k+\sum_1^p{}_n\left\{(F(\xi_{n,2}))^k+(F(\xi'_{n,2}))^k\right\}=$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=(F(\xi_p))^k+(F(\xi'_p))^k+\sum_1^p{}_n\left\{(F(\xi_{n,p}))^k+(F(\xi'_{n,p}))^k\right\},$$

donc:

$$\rho_k=\frac{1}{p}\sum_1^p{}_m\left\{(F(\xi_m))^k+(F(\xi'_m))^k+\sum_1^p{}_n\left\{(F(\xi_{n,m}))^k+(F(\xi'_{n,m}))^k\right\}\right\}.$$

Les quantités $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots \rho_{2p+2}$ sont donc des fonctions rationelles et symétriques des $2p^2+2p$ racines de l'équation (1). De là il suit qu'on peut les exprimer en fonctions rationelles des coefficients de cette équation, c'est-à-dire du module k. Donc enfin on peut exprimer les coefficients $q_0, q_1, \ldots, q_{2p+1}$ en fonctions rationelles du module k.

La fonction $F(\xi_1)$ est une fonction quelconque rationelle et symétrique de $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$, $F(\xi'_1)$ la même fonction de $\xi'_1, \xi'_2, \ldots \xi'_p$. Donc on les trouvera en fonctions rationelles du module k par la résolution de l'équation du degré $2p+2$:

$$(3)\quad x^{2p+2}+q_{2p+1}x^{2p+1}+q_{2p}x^{2p}+\ldots+q_1x+q_0=0.$$

Soit de plus:

$$(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_p)=x^p+r_{p-1}x^{p-1}+r_{p-2}x^{p-2}+\ldots+r_1x+r_0.$$

Les coefficients $r_0, r_1, \ldots r_{p-1}$ seront des fonctions rationelles et symétriques de $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$. Donc on peut faire successivement: $F(\xi_1)=r_0, =r_1, =r_2, \ldots =r_{p-1}$, et on déterminera les p coefficients $r_0, r_1, \ldots r_{p-1}$ par la résolution d'un nombre p d'équations de la forme (3).

Enfin on trouvera $\xi_1 = \sin^2 am\left(\frac{2K}{2p+1}\right)$ par la résolution de l'équation du degré p :

(4) $\quad x^p + r_{p-1}x^{p-1} + r_{p-2}x^{p-2} + \ldots + r_1 x + r_0 = 0.$

Puisque l'équation (3) est du degré $2p+2$, elle donnera en général $2p+2$ systèmes de valeurs des coefficients de l'équation (4), et la résolution de celle-ci donnera donc $(2p+2).p = 2p^2+2p$ racines, qui seront les $2p^2+2p$ racines de l'équation (1). Une d'elles sera donc la valeur de $\sin^2 am\left(\frac{2K}{2p+1}\right)$, une autre celle de $\sin^2 am\left(\frac{2iK'}{2p+1}\right)$, et le reste les valeurs de $\sin^2 am\left(\frac{2nK \pm 2miK'}{2p+1}\right)$, où n et m sont des nombres entiers depuis zéro jusqu'à p à l'exception des valeurs coïncidentes $n=0, m=0$, ou $m=1$, et $m=0$, $n=0$ ou $u=1$.

La résolution de l'équation (1) du degré $2p^2+2p$ est donc réduite à la résolution de p équations (3) du degré $2p+2$, et d'une équation (4) du degré p.

Chapitre septième.

Développement des fonctions elliptiques en séries infinies.

36. On développe facilement les fonctions elliptiques en séries infinies à l'aide des formules du cinquième chapitre sur les fonctions elliptiques des multiples de l'argument.

Si dans les formules (10), (11), (13) du **31** et (1), (2), (3) du **32** on fait croître p indéfiniment, on trouvera immédiatement les limites des premiers termes tant que les rapports $\frac{2n}{2p+1}$ et $\frac{2m}{2p+1}$ tendent vers zéro, et il s'agit seulement à démontrer que les limites des premières séries coïncident toujours avec les séries correspondantes à ces limites des premiers termes, et que les séries infinies résultantes soient convergentes.

Or sur la convergence ou la divergence des séries infinies on a les théorèmes suivants:

1. La série $\sum_1^\infty f(n)$ est convergente, si l'on peut trouver un nombre positif δ tel que l'expression $n^{1+\delta}f(n)$ tend vers zéro, tandisque n croît indéfinement.

La même série sera divergente, si l'expression $nf(n)$ tend vers une limite différente de zéro, tandisque n croît indéfiniment. et que la fonction f(n) reste toujours positive ou toujours négative pour toute valeur de n plus grande qu'une limite quelconque finie, ou, quand f(n) sera une fonction imaginaire de n, si ces deux conditions ont lieu pour la partie coefficient de $\sqrt{-1}$.

2. La série $\sum_1^\infty{}_n(-1)^n f(n)$, - où nous supposerons que f(n) pour toute valeur de n plus grande qu'une limite quelconque finie reste toujours positive, et que sa valeur numérique décroisse constamment pour des valeurs croissantes de n, ou, si f(n) est une fonction imaginaire, que ces conditions aient lieu séparément pour la partie réelle et pour la partie coefficient de $\sqrt{-1}$, — est convergente si f(n) tend vers zéro, tandisque n croît indéfiniment.

La même série est divergente, si f(n) tend vers une limite différente de zéro, tandisque n croît indéfiniment.

3. La série double $\sum_1^\infty{}_n \sum_1^\infty{}_m f(n,m)$ est convergente, si l'on peut trouver deux nombres positifs δ et δ' tels que, tandisque n et m croissent indéfiniment, l'expression $n^{1+\delta}.m^{1+\delta'}.f(n,m)$ tend vers zéro pour toute valeur du rapport $\frac{n}{m}$.

La même série sera divergente, si l'expression nmf(n,m) pour une valeur quelconque du rapport $\frac{n}{m}$ tend vers une limite différente de zéro, tandisque n croît indéfiniment, et que la fonction f(n,m) reste toujours positive ou toujours négative pour toutes les valeurs de n ou m plus grandes qu'une limite quelconque finie, ou, quand f(n,m) sera une fonction imaginaire, si ces deux conditions ont lieu pour la partie réelle, ou qu'elles aient lieu pour la partie coefficient de $\sqrt{-1}$.

4. La série double $\sum_1^\infty{}_n \sum_1^\infty{}_m(-1)^n f(n,m)$, — où nous supposerons que la fonction f(n,m) pour toutes les valeurs de n ou m plus grandes qu'une limite quelconque finie, reste toujours positive ou toujours négative, et que sa valeur numérique décroisse constamment pour des valeurs croissantes de n et pour toute valeur de m depuis 1 jusqu'à ∞ et pour toute valeur du rapport $\frac{n}{m}$, ou que f(n,m) soit la somme de deux parties, dont l'une est toujours positive, l'autre toujours négative, et dont chacune remplit les conditions précédentes, ou enfin, si f(n,m) est imaginaire, que ces conditions aient lieu séparément pour la partie réelle et pour la partie coefficient de $\sqrt{-1}$, — cette série est convergente, si l'on peut trouver un nombre positif δ tel que, tandisque m croît indéfiniment, l'expression $m^{1+\delta} f(n,m)$ tend vers zéro pour toute valeur de n depuis 1 jusqu'à ∞ et pour toute valeur du rapport $\frac{n}{m}$.

La même série sera divergente, si, tandis que m croît indéfiniment, l'expression mf(n,m) pour une valeur quelconque de n depuis 1 jusqu'à ∞ ou pour une valeur quelconque du rapport $\frac{n}{m}$ tend vers une limite différente de zéro.

5. La série double $\sum_1^\infty{}_n \sum_1^\infty{}_m(-1)^{n+m} f(n,m)$, — où nous supposerons que la fonction f(n,m) pour toutes les valeurs de n ou de m plus grandes qu'une

limite quelconque finie reste toujours positive ou toujours négative, et que sa valeur numérique décroisse constamment pour des valeurs croissantes de n et pour toute valeur de m depuis 1 jusqu'à ∞, ainsi que pour des valeurs croissantes de m et pour toute valeur de n depuis 1 jusqu'à ∞, et enfin que la valeur numérique de la différence $f(n,m) - f(n+1, m)$ décroisse pour des valeurs croissantes de m, — ou que, si $f(n,m)$ est imaginaire, ces conditions soient réalisées séparément par la partie réelle et par la partie coefficient de $\sqrt{-1}$, — cette série est convergente, si, tandisque n ou m croît indéfinement, la fonction $f(n,m)$ pour toute valeur de m ou de n depuis 1 jusqu'à ∞ et pour toute valeur du rapport $\frac{n}{m}$ tend vers zéro.

La même série sera divergente si, tandisque n ou m croît indéfinement, la fonction $f(n,m)$ pour une valeur quelconque de m ou de n depuis 1 jusqu'à ∞, ou pour une valeur quelconque du rapport $\frac{n}{m}$ tend vers une limite différente de zéro.

6. La série $\prod_1^{\infty}{}_n (1-f(n))$ — où nous supposerons que la valeur numérique de la fonction $f(n)$, ou, si elle est imaginaire, son module, finît par être toujours plus petit que l'unité, — est convergente, si l'on peut trouver un nombre positif δ tel que, tandisque n croît indéfiniment, l'expression $n^{1+\delta} f(n)$ tend vers zéro.

La même série sera divergente, si, tandisque n croît indéfiniment, l'expression $nf(n)$ tend vers une limite différente de zéro.

7. La série $\prod_1^{\infty}{}_n \frac{1-f(n)}{1-\varphi(n)}$ — où nous supposerons que les valeurs numériques des fonctions $f(n)$ et $\varphi(n)$, ou, si elles sont imaginaires, leurs modules, finissent par être plus petits que l'unité, — est convergente, si l'on peut trouver un nombre positif δ tel que, tandisque n croît indéfiniment, l'expression $n^{1+\delta}(f(n) - \varphi(n))$ tend vers zéro.

La même série sera divergente, si, tandisque n croît indéfiniment, l'expression $n(f(n) - \varphi(n))$ tend vers une limite différente de zéro.

8. La série double $\prod_1^{\infty}{}_n \prod_1^{\infty}{}_m (1-f(n,m))$ — où nous supposerons que la valeur numérique de la fonction $f(n,m)$, ou, si elle est imaginaire, son module, finît par être plus petit que l'unité — est convergente, si l'on peut trouver deux nombres positifs δ et δ' tels que, tandisque n et m croissent indéfiniment, l'expression $n^{1+\delta}.m^{1+\delta'}.f(n,m)$ tend vers zéro pour toute valeur du rapport $\frac{n}{m}$.

La même série sera divergente, si, tandisque n et m croissent indéfinement, l'expression $nmf(n,m)$ pour une valeur quelconque du rapport $\frac{n}{m}$ tend vers une limite différente de zéro.

9. La série double $\prod_1^\infty{}_n \prod_1^\infty{}_m \frac{1-f(n,m)}{1-\varphi(n,m)}$ — où nous supposerons que les valeurs numériques des fonctions f(n,m) et φ(n,m), ou, si elles sont imaginaires, leurs modules, finissent par être plus petites que l'unité — est convergente si l'on peut trouver deux nombres positifs δ et δ′ tels que, tandis que n et m croissent indéfiniment, l'expression $n^{1+\delta}.m^{1+\delta'}.(f(n,m)-\varphi(n,m))$ tende vers zéro pour toute valeur du rapport $\frac{n}{m}$.

La même série sera divergente si, tandis que n et m croissent indéfiniment, l'expression $nm.(f(n,m)-\varphi(n,m))$ pour une valeur quelconque du rapport $\frac{n}{m}$ tend vers une limite différente de zéro.

Le théorème de convergence ou divergence 1 est donné par Cauchy dans ses Exc. Math. Vol. II, les théorèmes 2 et 6 dans son Cours d'Analyse. On démontre facilement les autres théorèmes de la même manière que le théorème 1.

37. Pour développer les fonctions elliptiques en séries infinies nous sortiront des équations (1), (2) et (3) du **32**. En y substituant u au lieu de (2p+1) u on peut les mettre sous la forme:

$$(1)\quad \operatorname{sin\,am} u = \frac{1}{2p+1}\operatorname{sin\,am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)\Bigg\{1+2\sum_1^p{}_n(-1)^n.\frac{\cos\operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\Delta\operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}\Bigg\}$$

$$+\frac{2u}{k}.\frac{\operatorname{sin\,am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)}.\frac{1}{(2p+1)^2}\Bigg\{\sum_1^p{}_m\frac{\cos\operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta\operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+$$

$$+\sum_1^p{}_n\sum_1^p{}_m(-1)^n\Bigg(\frac{\cos\operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta\operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+$$

$$+\frac{\cos\operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta\operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\Bigg)\Bigg\};$$

$$(2)\quad \cos\operatorname{am} u = \frac{(-1)^p}{2p+1}.\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right).$$

$$\cdot\Bigg\{1+2\sum_1^p{}_n(-1)^n.\frac{\cos\operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}\Bigg\}+$$

$$+\frac{2i}{k}\cdot\cos am\left(\frac{u}{2p+1}\right)\cdot\frac{1}{2p+1}\left\{\sum_1^p{}_m(-1)^m\cdot\frac{\sin am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+\right.$$

$$+\sum_1^p{}_n\sum_1^p{}_m(-1)^{n+m}\cdot\left(\frac{\sin am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sin am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\right)\right\};$$

$$(3)\ \Delta am\,u=\frac{(-1)^p}{2p+1}.\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)\left\{1+2\sum_1^p{}_n\frac{\Delta am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{1-k^2\sin^2am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\sin^2am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}\right\}+$$

$$+2i.\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right).\frac{1}{2p+1}\left\{\sum_1^p{}_m(-1)^m.\frac{\sin am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\cos am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}+\right.$$

$$+\sum_1^p{}_n\sum_1^p{}_m(-1)^m\left(\frac{\sin am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\cos am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sin am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\cos am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\right)\right\}.$$

On fait maintenant croître p indéfiniment. Alors on aura:

$$\lim_{p=\infty}\left\{\frac{1}{2p+1}.\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right\}=0;\quad\lim_{p=\infty}\left\{\frac{\sin am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)}\right\}=1;$$

$$\lim_{p=\infty}\cos am\left(\frac{u}{2p+1}\right)=1;\quad\lim_{p=\infty}\left\{\frac{(-1)^p}{2p+1}.\cos am\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right\}=0.$$

Les séries finies: $\sum_1^p{}_n(-1)^n.\dfrac{\cos am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{1-k^2\sin^2am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\sin^2am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}$ et

$\sum_1^p{}_n(-1)^n.\dfrac{\cos am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{1-k^2\sin^2am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\sin^2am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}$ tendront pour des valeurs indé-

finiment croissantes de p vers des séries infinies, lesquelles seront convergentes en vertu du théorème 2 du paragraphe précédent, puisque pour $n = p$:

$$\lim_{p=\infty} \operatorname{cos\,am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) = \operatorname{cos\,am} \dot{K} = 0:$$

Donc les produits de ces séries par $\frac{1}{2p+1}$ tendront vers zéro.

Considérons maintenant la limite pour $p = \infty$ de la série:

$$\sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{1}{(2p+1)^2} \cdot \frac{\operatorname{cos\,am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right) . \Delta \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}.$$

On voit ici immédiatement que les premiers termes de cette série, tant que $\frac{2m-1}{2p+1}$ tend vers zéro, tendront vers les premiers termes de la série:

$$\sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{1}{u^2 - ((2m-1)iK')^2}.$$

Or on peut démontrer que ces deux séries ont la même limite pour des valeurs infinies de p, ou que la limite de leurs différence est zéro. En effet, si l'on désigne par F(p) la différence de ces deux séries, et qu'on pose pour abréger:

$$\frac{(2m-1)iK'}{2p+1} = \varepsilon, \quad \frac{\operatorname{cos\,am}\varepsilon . \Delta \operatorname{am}\varepsilon}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 \operatorname{am}\varepsilon} - \frac{1}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2 - \varepsilon^2} = \varphi(\varepsilon),$$

$$\text{on aura: } F(p) = \sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}.$$

Maintenant on remarque que $\varphi(\varepsilon)$ est une quantité finie réelle ou imaginaire pour toute valeur de m depuis $m = 1$ jusqu'à $m = p$, même si p croît indéfiniment. Car si $\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 \operatorname{am}\varepsilon = 0$, il faut qu'en même temps on ait: $\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2 - \varepsilon^2 = 0$, et alors on trouvera $\varphi(\varepsilon) = \frac{1+k^2}{6}$; le numérateur $\operatorname{cos\,am}\varepsilon . \Delta \operatorname{am}\varepsilon$ ne peut devenir infini que dans le cas de $\lim_{p=\infty} \left(\frac{2m-1}{2p+1}\right) = 1$, et alors on aura: $\lim \varepsilon = iK'$, donc:

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{\operatorname{cos\,am}\varepsilon . \Delta \operatorname{am}\varepsilon}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 \operatorname{am}\varepsilon} \right) = k.$$

Puisque $\varphi(\varepsilon)$ sera toujours une quantité finie, la limite pour $p = \infty$ de la série $\sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{\varphi(\varepsilon)}{2p+1}$ sera aussi une quantité finie; donc la limite de la série $\sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2} = F(p)$ sera zéro. Donc enfin on a:

$$\lim_{p=\infty}\left\{\frac{1}{(2p+1)^2}\sum_{1}^{p}{}_{m}\frac{\cos am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2 am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\right\}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1}{u^2-((2m-1)iK')^2}=\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1}{u^2+(2m-1)^2K'^2}.$$

Cette série est convergente en vertu du théorème 1 du paragraphe précédent, puisque $\frac{m^{1+\delta}}{u^2+(2m-1)^2K'^2}$ tend vers zéro pour des valeurs infinies de m, tant que $\delta<1$.

De la même manière on cherche la limite pour $p=\infty$ de la série:

$$\sum_{1}^{p}{}_{m}(-1)^m.\frac{1}{2p+1}.\frac{\sin am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2 am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}.$$

Les premiers termes de cette série, tant que $\frac{2m-1}{2p+1}$ tend vers zéro, tendront vers les premiers termes de la série:

$$\sum_{1}^{p}{}_{m}(-1)^m.\frac{(2m-1)iK'}{u^2-((2m-1)iK')^2}.$$

Or on peut démontrer que ces deux séries ont la même limite pour des valeurs infinies de p, ou que la limite de leurs différence est zéro. En effet si l'on désigne par F(p) la différence de ces deux séries, et qu'on pose pour abréger:

$$\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}=\varepsilon,\quad \frac{\sin am\,\varepsilon.\Delta am\,\varepsilon}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2 am\,\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2-\varepsilon^2}=\varphi(\varepsilon)$$

$$\text{on aura: } F(p)=\sum_{1}^{p}{}_{m}(-1)^m.\frac{\varphi(\varepsilon)}{2p+1}.$$

Maintenant pour $p=\infty$ la limite de $\varphi(\varepsilon)$ sera toujours une quantité finie. En effet on a: $\lim\varphi(\varepsilon)=\lim\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\Delta am\,\varepsilon}{\sin am\,\varepsilon}\right)$ et $\sin am\,\varepsilon$ ne peut disparaître qu'avec ε, et alors on aura: $\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\Delta am\,\varepsilon}{\sin am\,\varepsilon}=0$, et $\Delta am\,\varepsilon$ ne peut devenir infinie que dans le cas de $\lim\left(\frac{2m-1}{2p+1}\right)=1$, et alors on aura: $\lim\varepsilon=iK'$ et $\lim\left(\frac{\Delta am\,\varepsilon}{\sin am\,\varepsilon}\right)=-ik$.

On remarque de plus que, si l'on augmente m d'une unité, la quantité ε sera augmentée de $\frac{2iK'}{2p+1}$; donc on a:

$$\sum_{m}^{m+1}(-1)^m\varphi(\varepsilon)=(-1)^m\varphi(\varepsilon)+(-1)^{m+1}\varphi\left(\varepsilon+\frac{2iK'}{2p+1}\right)=(-1)^m\left(\varphi(\varepsilon)-\varphi\left(\varepsilon+\frac{2iK'}{2p+1}\right)\right),$$

et si l'on pose $m = 2s - 1$, et qu'on suppose p un nombre impair, on aura pour des valeurs infinies de p:

$$\lim \sum_{1}^{p}{}_{m}(-1)^m\varphi(\varepsilon) = -\lim \sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{s}(\varphi(\varepsilon) \quad \varphi(\varepsilon+\frac{2iK'}{2p+1})) = 2iK'.\lim \sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{s}\frac{d_\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{2p+1},$$

et de là: $\lim F(p) = 2iK' \lim \sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{s}\frac{d_\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}$.

Si l'on différentie maintenant par rapport à ε l'expression:

$$\lim \varphi(\varepsilon) = \lim (\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\Delta \operatorname{am} \varepsilon}{\sin \operatorname{am} \varepsilon}), \text{ on trouvera:}$$

$$\lim d_\varepsilon\varphi(\varepsilon) = \lim (\frac{\cos \operatorname{am} \varepsilon}{\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2}).$$

Or l'expression $(\frac{\cos \operatorname{am} \varepsilon}{\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2})$ reste une quantité finie réelle ou imaginaire pour toute valeur de m depuis $m = 1$ jusqu'à $m = p$, même si p croît indéfiniment. Car $\sin \operatorname{am} \varepsilon$ ne peut pas disparaître qu'avec ε et alors on trouvera: $\frac{\cos \operatorname{am} \varepsilon}{\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{2k^2-1}{6}$, et $\cos \operatorname{am} \varepsilon$ ne peut dévenir infinie qu'avec $\lim (\frac{2m-1}{2p+1}) = 1$, $\varepsilon = iK'$, et alors on aura: $\frac{\cos \operatorname{am} \varepsilon}{\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon} = 0$. Donc la limite de la série $\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{s}\frac{d_\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{2p+1}$ sera toujours une quantité finie, et la limite de la série $\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{s}\frac{d_\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}$ ou de F(p) sera zéro. Donc enfin on a:

$$\lim_{p=\infty} \left\{ \frac{1}{2p+1} \sum_{1}^{p}{}_{m}(-1)^m . \frac{\sin \operatorname{am}(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}) . \Delta \operatorname{am}(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin^2 \operatorname{am}(\frac{u}{2p+1}) - \sin^2 \operatorname{am}(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1})} \right. =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{m}(-1)^m \frac{(2m-1)iK'}{u^2-((2m-1)iK')^2} = iK' \sum_{1}^{\infty}{}_{m}(-1)^m . \frac{2m-1}{u^2+(2m-1)^2K'^2}.$$

Cette série est convergente en vertu du théorème 2 du paragraphe précédent, puisque $\frac{2m-1}{u^2+(2m-1)^2K'^2}$ tend vers zéro pour des valeurs infinies de m.

Nous chercherons maintenant la limite de la série double:

$$\sum_{1}^{p}{}_{n} \sum_{1}^{p}{}_{m}(-1)^n . \frac{1}{(2p+1)^2} . \frac{\cos \operatorname{am}(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}) . \Delta \operatorname{am}(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin^2 \operatorname{am}(\frac{u}{2p+1}) - \sin^2 \operatorname{am}(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}.$$

Les premiers termes de cette série, tant que $\frac{2n}{2p+1}$ et $\frac{2m-1}{2p+1}$ tendent vers zéro, tendront vers les premiers termes de la série:

$$\sum_{1}^{p}{}_{n} \sum_{1}^{p}{}_{m}(-1)^n \frac{1}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}.$$

Or la limite pour $p = \infty$ de la différence de ces deux séries est zéro. En effet, si l'on désigne cette différence par $F(p)$, et qu'on pose pour abréger: $\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1} = \varepsilon$, $\frac{\cos am\,\varepsilon \,.\, \Delta am\,\varepsilon}{\sin^2 am(\frac{u}{2p+1}) - \sin^2 am\,\varepsilon} - \frac{1}{(\frac{u}{2p+1})^2 - \varepsilon^2} = \varphi(\varepsilon)$,

on aura: $F(p) = \sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^n . \frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}$.

Maintenant on trouve comme auparavant que $\varphi(\varepsilon)$ est une quantité finie pour toutes valeurs de n et de m depuis 1 jusqu'à p, même si p croit indéfiniment. De plus quand on augmente n d'une unité, la quantité ε sera augmentée de $\frac{2K}{2p+1}$; donc on a:

$$\sum_n^{n+1}(-1)^n\varphi(\varepsilon) = (-1)^n(\varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon + \frac{2K}{2p+1})),$$

et si l'on pose $n = 2r - 1$, et qu'on suppose p un nombre impair, on aura pour des valeurs infinies de p:

$$\lim \sum_1^p{}_n (-1)^n\varphi(\varepsilon) = -\lim \sum_1^{\frac{p+1}{2}}{}_r (\varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon + \frac{2K}{2p+1})) = 2K . \lim \sum_1^{\frac{p+1}{2}}{}_r \frac{d_\varepsilon \varphi(\varepsilon)}{2p+1}, \text{ et de là:}$$

$$\lim F(p) = 2K . \lim \sum_1^{\frac{p+1}{2}}{}_r \sum_1^p{}_m \frac{d_\varepsilon \varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^3}.$$

Maintenant on a pour des valeurs infinies de p:

$$\lim \varphi(\varepsilon) = \lim (\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{\cos am\,\varepsilon \,.\, \Delta am\,\varepsilon}{\sin^2 am\,\varepsilon}),$$

et de là en différentiant:

$$\lim d_\varepsilon \varphi(\varepsilon) = 2\lim \left(\frac{1 - \frac{1+k^2}{2} \sin^2 am\,\varepsilon}{\sin^3 am\,\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^3} \right).$$

Or l'expression: $\frac{1 - \frac{1+k^2}{2} \sin^2 am\,\varepsilon}{\sin^3 am\,\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^3}$ reste une quantité finie, réelle on imaginaire, pour toutes valeurs de m et de n depuis 1 jusqu'à p. même quand p croît indéfiniment. Car $\sin am\,\varepsilon$ ne peut disparaître qu'avec ε, et alors on trouvera: $\lim \left(\frac{1 - \frac{1+k^2}{2} \sin^2 am\,\varepsilon}{\sin^3 am\,\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^3} \right) = 0$. De là il suit que la limite pour $p = \infty$ de la série: $\sum_1^p{}_m \frac{d_\varepsilon \varphi(\varepsilon)}{2p+1}$ sera une quantité finie, donc aussi la limite de la série double: $\sum_1^{\frac{p+1}{2}}{}_r \sum_1^p{}_m \frac{d_\varepsilon \varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}$. Donc enfin la limite de la série: $\sum_1^{\frac{p+1}{2}}{}_r \sum_1^p{}_m \frac{d_\varepsilon \varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^3}$ sera zéro, ou $\lim . F(p) = 0$. On a donc:

$$\lim_{p=\infty}\left\{\frac{1}{(2p+1)^2}\sum_1^p\sum_1^p(-1)^n.\frac{\cos am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}).\Delta am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin^2 am(\frac{u}{2p+1})-\sin^2 am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}\right\}$$

$$=\sum_1^\infty\sum_1^\infty(-1)^n.\frac{1}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}.$$

Cette série est convergente en vertu du théorème 4 du paragraphe précédent, puisque:

$$\frac{m^{1+\delta}}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}=\frac{(\frac{1}{4n}+\frac{1}{2}.\frac{2m-1}{2n})^2}{.\,m^{1-\delta}.[(\frac{u}{2n})^2-(K+\frac{2m-1}{2n}.iK')^2]},$$

tant que $\delta<1$, tend vers zéro pour des valeurs infinies de m, pour toute valeur de n depuis 1 jusqu'à ∞ et pour toute valeur du rapport $\frac{2m-1}{2n}$ depuis zéro jusqu'à l'infinie.

Si l'on change le signe de i, on aura de même:

$$\lim_{p=\infty}\left\{\frac{1}{(2p+1)^2}\sum_1^p\sum_1^p(-1)^n.\frac{\cos am(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}).\Delta am(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin^2 am(\frac{u}{2p+1})-\sin^2 am(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1})}\right\}=$$

$$=\sum_1^\infty\sum_1^\infty(-1)^n.\frac{1}{u^2-(2nK-(2m-1)iK')^2}.$$

Nous chercherons maintenant la limite de la série double:

$$\sum_1^p\sum_1^p(-1)^{n+m}\frac{1}{2p+1}.\frac{\sin am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}).\Delta am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin^2 am(\frac{u}{2p+1})-\sin^2 am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}.$$

Les premiers termes de cette série, tant que $\frac{2n}{2p+1}$ et $\frac{2m-1}{2p+1}$ tendent vers zéro, tendront vers les premiers termes de la série:

$$\sum_1^p\sum_1^p(-1)^{m+n}.\frac{2nK+(2m-1)iK'}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}.$$

Or la limite pour $p=\infty$ de la différence de ces deux séries est zéro. En effet, si l'on désigne cette différence par F(p), et qu'on pose pour abréger: $\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}=\varepsilon$, $\frac{\sin am\,\varepsilon\,.\,\Delta am\,\varepsilon}{\sin^2 am(\frac{u}{2p+1})-\sin^2 am\,\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{(\frac{u}{2p+1})^2-\varepsilon^2}=\varphi(\varepsilon)$,

ou aura: $F(p)=\sum_1^p\sum_1^p(-1)^{n+m}.\frac{\varphi(\varepsilon)}{2p+1}$.

La fonction $\varphi(\varepsilon)$ a une valeur finie pour toutes les valeurs de n et de m depuis 1 jusqu'à p, même si p croît indéfiniment. De plus quand on augmente n d'une unité, la quantité ε sera augmentée de $\frac{2K}{2p+1}$; donc on aura:

$$\sum_{n}^{n+1}(-1)^n\varphi(\varepsilon) = (-1)^n(\varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon + \frac{2K}{2p+1})),$$

et si l'on pose $n = 2r-1$, et qu'on suppose p un nombre impair, on aura pour des valeurs infinies de p:

$$\lim \sum_{1}^{p}{}_{n}(-1)^n\varphi(\varepsilon) = 2K.\lim \sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{r}\frac{d_\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{2p+1}.$$

Si l'on augmente m d'une unité, on trouvera de même que la quantité ε sera augmentée de $\frac{2iK'}{2p+1}$, et qu'on aura:

$$\sum_{m}^{m+1}(-1)^m\psi(\varepsilon) = (-1)^m(\psi(\varepsilon) - \psi(\varepsilon + \frac{2iK'}{2p+1})),$$

et si l'on pose $m = 2s-1$:

$$\lim \sum_{1}^{p}{}_{m}(-1)^m\psi(\varepsilon) = 2iK'.\lim \sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{s}\frac{d_\varepsilon\psi(\varepsilon)}{2p+1}.$$

Si l'on pose ici $\psi(\varepsilon) = \sum_{1}^{p}{}_{n}(-1)^n\varphi(\varepsilon)$, et qu'on substitue la limite précédente de cette expression, on aura enfin:

$$\lim \sum_{1}^{p}{}_{n}\sum_{1}^{p}{}_{m}(-1)^{n+m}\varphi(\varepsilon) = 4iKK'.\lim \sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{r}\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{s}\frac{d_\varepsilon{}^2\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2},$$

et de là: $\lim F(p) = 4iKK'.\lim \sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{r}\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{s}\frac{d_\varepsilon^2\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^3}.$

Maintenant on a pour des valeurs infinies de p:

$$\lim \varphi(\varepsilon) = \lim (\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\Delta \operatorname{am} \varepsilon}{\sin \operatorname{am} \varepsilon}),$$

et de là en différentiant deux fois de suite par rapport à ε:

$$\lim d_\varepsilon^2\varphi(\varepsilon) = \lim (\frac{2}{\varepsilon^3} - \frac{(1+\cos^2 \operatorname{am} \varepsilon).\Delta \operatorname{am} \varepsilon}{\sin^3 \operatorname{am} \varepsilon}).$$

Or l'expression $\frac{2}{\varepsilon^3} - \frac{(1+\cos^2 \operatorname{am} \varepsilon).\Delta \operatorname{am} \varepsilon}{\sin^3 \operatorname{am} \varepsilon}$ reste une quantité finie, réelle ou imaginaire, pour toutes les valeurs de m et de n depuis 1 jusqu'à p, même quand p croît indéfiniment. Car $\sin \operatorname{am} \varepsilon$ ne peut disparaitre qu'avec ε, et alors on trouvera: $\lim (\frac{2}{\varepsilon^3} - \frac{(1+\cos^2 \operatorname{am} \varepsilon).\Delta \operatorname{am} \varepsilon}{\sin^3 \operatorname{am} \varepsilon}) = 0$, et $(1+\cos^2 \operatorname{am} \varepsilon)\Delta \operatorname{am} \varepsilon$ ne peut devenir infinie que dans le cas de $\lim (\frac{2n}{2p+1}) = 0$, $\lim (\frac{2m-1}{2p+1}) = 1$, donc $\lim \varepsilon = iK'$, et alors on aura: $\lim (\frac{(1+\cos^2 \operatorname{am} \varepsilon).\Delta \operatorname{am} \varepsilon}{\sin^3 \operatorname{am} \varepsilon}) = ik$. Donc la limite de $d_\varepsilon^2\psi(\varepsilon)$ sera toujours une quantité finie. De là il suit que pour des valeurs infinies de p la limite de la serie $\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{r}\frac{d_\varepsilon^2\psi(\varepsilon)}{2p+1}$ sera une quantité finie, donc aussi la limite de la serie double $\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{r}\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}{}_{s}\frac{d_\varepsilon^2\psi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}$. Donc

enfin la limite de la série $\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}\sum_{1}^{\frac{p+1}{2}}\frac{d_\varepsilon^2\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^3}$ sera zéro, ou: lim F (p) = o.

On a donc:

$$\lim\left\{\frac{1}{2p+1}\sum_{1}^{p}{}_n\sum_{1}^{p}{}_m(-1)^{n+m}.\frac{\sin am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2 am\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\right\}$$

$$=\sum_{1}^{\infty}{}_n\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^{n+m}.\frac{2nK+(2m-1)iK'}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}.$$

Cette série est convergente en vertu du théorème 5 du paragraphe précédent, puisque l'expression:

$$\frac{2nK+(2m-1)iK'}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}=\frac{K+\frac{2m-1}{2n}.iK'}{2n\left(\left(\frac{u}{2n}\right)^2-\left(K+\frac{2m-1}{2n}iK'\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{\frac{2n}{2m-1}K+iK'}{(2m-1)\left(\left(\frac{u}{2m-1}\right)^2-\left(\frac{2n}{2m-1}K+iK'\right)^2\right)}$$

tend vers zéro tandis que n croît indéfiniment pour toute valeur de m depuis 1 jusqu'à ∞ et pour toute valeur du rapport $\frac{2m-1}{2n}$ depuis zéro jusqu'à l'infini, et de même tandis que m croît indéfiniment pour toute valeur de n depuis 1 jusqu'à ∞ et pour toute valeur du rapport $\frac{2n}{2m-1}$ depuis zéro jusqu'à l'infini.

Si l'on change le signe de i, on aura de même:

$$\lim_{p=\infty}\left\{\frac{1}{2p+1}\sum_{1}^{p}{}_n\sum_{1}^{p}{}_m(-1)^{n+m}.\frac{\sin am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\Delta am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2 am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\right\}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}{}_n\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^{n+m}.\frac{2nK-(2m-1)iK'}{u^2-(2nK-(2m-1)iK')^2}.$$

En substituant les limites précédentes dans les équations (1) et (2) on trouvera les fonctions sin am u et cos am u développées en séries infinies:

$$(4)\qquad \sin am\,u=\frac{2u}{k}\left\{\sum_{1}^{\infty}{}_m\frac{1}{u^2+(2m-1)^2K'^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{\infty}{}_n\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^n\left(\frac{1}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}+\frac{1}{u^2-(2nK-(2m-1)iK')^2}\right)\right\};$$

$$(5)\qquad \cos am\,u=\frac{2i}{k}\left\{\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^m.\frac{(2m-1)iK'}{u^2+(2m-1)^2K'^2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{\infty}{}_n\sum_{1}^{\infty}{}_m(-1)^{n+m}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}-\frac{2nK-(2m-1)iK'}{u^2-(2nK-(2m-1)iK')^2}\right)\right\};$$

Si l'on veut chercher de la même manière la limite de $\Delta am\, u$ de l'équation (3), on aura des séries divergentes. Une telle est en effet en vertu du théorème 4 du paragraphe précédent la série double:

$$\sum_1^n \sum_1^\infty (-1)^m \left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2} - \frac{2nK-(2m-1)iK'}{u^2-(2nK-(2m-1)iK')^2} \right) =$$

$$= 2iK' \sum_1^n \sum_1^\infty (-1)^m \cdot \frac{(2m-1)(u^2+(2nK)^2+((2m-1)K')^2)}{u^4-2u^2((2nK)^2-((2m-1)K')^2)+((2nK)^2+((2m-1)K')^2)^2}.$$

Car tandis que n croît indéfiniment, l'expression

$$nf(n,m) = \frac{n(2m-1)(u^2+(2nK)^2+((2m-1)K')^2)}{u^4-2u^2((2nK)^2-((2m-1)K')^2)+((2nK)^2+((2m-1)K')^2)^2}$$

$$= \frac{\frac{2m-1}{2n} \cdot \left(\frac{u^2}{4n^2} + K^2 + \left(\frac{2m-1}{2n}\right)^2 K'^2 \right)}{\frac{u^4}{8n^4} - \frac{u^2}{n^2}\left(K^2 - \left(\frac{2m-1}{2n}\right)^2 K'^2 \right) + 2\left(K^2 + \left(\frac{2m-1}{2n}\right)^2 K'^2 \right)^2}$$

tendra vers la valeur: $\dfrac{\left(\frac{2m-1}{2n}\right)}{2\left(K^2 + \left(\frac{2m-1}{2n}\right)^2 K'^2 \right)}$ pour des valeurs finies du rapport $\frac{2m-1}{2n}$.

La forme oscillante de cette série saute aux yeux, si l'on pose $u = o$. Alors cette série deviendra:

$$2iK' \sum_1^n \sum_1^\infty (-1)^m \cdot \frac{2m-1}{(2nK)^2+((2m-1)K')^2} = \frac{i}{K} \sum_1^n \sum_1^\infty (-1)^m \cdot \frac{\left(\frac{(2m-1)K'}{2K}\right)}{n^2+\left(\frac{(2m-1)K'}{2K}\right)^2} =$$

$$= \frac{i}{K} \sum_1^\infty (-1)^m \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} - \frac{K}{(2m-1)K'} \right\},$$

où l'on remarque que: $\sum_1^n \frac{1}{n^2+x^2} = \frac{\pi}{2x} \cdot \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}} - \frac{1}{2x^2}$, et qu'on pose pour abréger: $e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$. De plus puisque:

$\sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{2m-1} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots = -\frac{\pi}{2}$, la série précédente deviendra:

$$\frac{\pi i}{2K} \cdot \sum_1^\infty (-1)^m \cdot \frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} + \frac{\pi i}{2K'}.$$

Or la série: $\sum_1^\infty (-1)^m \frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}} = -\frac{1+q}{1-q} + \frac{1+q^3}{1-q^3} - \frac{1+q^5}{1-q^5} + \ldots$

est une série oscillante, puisque ses termes pour des valeurs infinies de m s'approcheront alternativement de + 1 et de — 1. En vertu du paragraphe 17

la partie réelle du rapport $\frac{K'}{K}$ est toujours positive, donc le module de la fonction: $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ est toujours plus petit que l'unité, et q^m tendra vers zéro pour des valeurs infinies de m.

Mais l'oscillation de la série double de l'équation (3) est annulée par l'oscillation de la première série de la même équation, dont l'oscillation est produite par le facteur $(-1)^p$. Or pour faire disparaître cette oscillation des différentes séries de l'équation (3) et pour n'avoir à faire qu'avec des séries convergentes, on développe en série l'expression $1 - \Delta \operatorname{am} u$ au lieu de $\Delta \operatorname{am} u$. Si l'on pose $u = o$ dans l'équation (3) on aura:

$$1 = \frac{(-1)^p}{2p+1}\left\{1 + 2\sum_1^p{}_n \Delta \operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)\right\} - \frac{2i}{2p+1}\sum_1^p{}_m (-1)^m \cdot \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}$$

$$- \frac{2i}{2p+1}\sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^m \left\{ \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} - \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} \right\}$$

et de là:

$$(6) \quad 1 - \Delta \operatorname{am} u = \frac{(-1)^p}{2p+1}\left\{1 - \Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right\} -$$

$$- \frac{2(-1)^p}{2p+1}\sum_1^p{}_n \left\{ \Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) \cdot \frac{\Delta \operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)} - \Delta \operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) \right\}$$

$$- \frac{2i}{2p+1}\sum_1^p{}_m (-1)^m \left\{ \Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\sin \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right) \cos \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} + \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} \right\}$$

$$- \frac{2i}{2p+1}\sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^m \left\{ \Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\sin \operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right) \cdot \cos \operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} + \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{(2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} \right\}$$

$$+ \frac{2i}{2p+1}\sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^m \left\{ \Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\sin \operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right) \cdot \cos \operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} + \frac{\cos \operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin \operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} \right\} =$$

$$= \frac{(-1)^p}{2p+1}\left\{1 - \Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right\} -$$

$$k^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}\cdot\frac{1-\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}$$

$$-\frac{2(-1)^p.u^2}{(2p+1)^3}\sum_1^p{}_n\,\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\frac{}{1-k^2.\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}$$

$$-\frac{2iu^2}{(2p+1)^3}\sum_1^p{}_m(-1)^m.\frac{\cos\mathrm{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}.$$

$$\cdot\frac{\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\frac{1-\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}$$

$$-\frac{2iu^2}{(2p+1)^3}\sum_1^p{}_n\sum_1^p{}_m(-1)^m.\frac{\cos\mathrm{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}.$$

$$\cdot\frac{\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\frac{1-\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}$$

$$+\frac{2iu^2}{(2p+1)^3}\sum_1^p{}_n\sum_1^p{}_m(-1)^m.\frac{\cos\mathrm{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin\mathrm{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}.$$

$$\cdot\frac{\frac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\frac{1-\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}.$$

Si l'on fait croître ici p indéfiniment, on aura :

$$\lim_{p=\infty}\left(1-\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right)=0,\quad\lim_{p=\infty}\left(\frac{1-\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}\right)=\frac{0}{0}=\frac{k^2}{2},$$

$$\lim_{p=\infty}\left(\frac{\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)}\right)=\frac{0}{0}=1.$$

Nous ferons maintenant pour abréger:

$$\Delta am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\frac{k^2.\sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}-\frac{1-\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}}{1-k^2.\sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right).\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}=\varphi(n),$$

et nous chercherons la limite pour $p=\infty$ de la série: $\sum_1^p{}_n \frac{\varphi(n)}{(2p+1)^3}$.

Or $\varphi(n)$ est une quantité finie pour toute valeur de n depuis 1 jusqu'à p, même si p croît indéfiniment. Donc la limite de la série: $\sum_1^p{}_n \frac{\varphi(n)}{2p+1}$ sera aussi une quantité finie, donc enfin la limite de $\sum_1^p{}_n \frac{\varphi(n)}{(2p+1)^2}$, et encore plus de la série $\sum_1^p{}_n \frac{\varphi(n)}{(2p+1)^3}$, sera zéro.

Considérons maintenant la limite de la série:

$$\sum_1^p{}_m (-1)^m.\frac{1}{(2p+1)^3}.\frac{\cos am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}.$$

$$.\frac{\frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}-\sin^2 am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right).\frac{1-\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2 am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}.$$

Or on voit que les premiers termes de cette série, tant que $\frac{2m-1}{2p+1}$ tend vers zéro, tendront vers les premiers termes de la série: $\sum_1^p{}_m (-1)^m.\frac{1}{(2m-1)iK'}.\frac{1}{u^2-((2m-1)iK')^2}$, et on peut démontrer, de la même manière que plus haut pour les séries des fonctions sin am u et cos am u, que la limite de la différence de ces deux séries est zéro. En effet, si l'on désigne cette différence par F(p), et qu'on pose pour abréger: $\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}=\varepsilon$, et

$$\frac{\cos am\,\varepsilon}{\sin am\,\varepsilon}.\frac{\frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}-\sin^2 am\,\varepsilon.\frac{1-\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2 am\,\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}.\frac{1}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2-\varepsilon^2}=\varphi(\varepsilon)$$

on aura: $F(p)=\sum_1^p{}_m (-1)^m.\frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^3}$.

La fonction $\varphi(\varepsilon)$ a une valeur finie pour toutes les valeurs de m depuis $m = 1$ jusqu'à $m = p$, même si p croît indéfiniment. Car si $\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 am\,\varepsilon = o$, il faut qu'en même temps on ait: $\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2 - \varepsilon^2 = o$, et alors on trouvera: $\varphi(\varepsilon) = o$; si $sin am\,\varepsilon = o$, et $\frac{u}{2p+1} = a\,\varepsilon$, où a est une quantité finie ou zéro, on aura de même $\varphi(\varepsilon) = o$; enfin $cos am\,\varepsilon$ ne peut devenir infini que dans le cas de $\lim\left(\frac{2m-1}{2p+1}\right) = 1$, donc $\lim \varepsilon = iK'$, et alors on aura:

$$\lim\ \varphi(\varepsilon) = \frac{i}{K'^3} - \frac{ik^2}{2}.$$

Donc la limite de $\varphi(\varepsilon)$ sera toujours une quantité finie. De là il suit que la limite de la série: $\sum_1^p{}_m (-1)^m . \frac{\varphi(\varepsilon)}{2p+1}$ sera une quantité finie, et que: $\lim F(p) = \lim \sum_1^p{}_m (-1)^m . \frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^3} = o$. On a donc:

$$\lim \left\{ \frac{1}{(2p+1)^3} \sum_1^p{}_m (-1)^m . \frac{\cos am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2} - \sin^2 am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right) . \frac{1 - \Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)} \right\} =$$

$$= \sum_1^\infty{}_m (-1)^m . \frac{1}{(2m-1)iK'} \cdot \frac{1}{u^2 - ((2m-1)iK')^2} = \frac{1}{iK'} \sum_1^\infty{}_m (-1)^m . \frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{u^2 + (2m-1)^2 K'^2}$$

Cette série est convergente en vertu du théorème 2 du paragraphe précédent, puisque la quantité: $\frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{u^2 + (2m-1)^2 K'^2}$ tend vers zéro tandis que m croît indéfiniment.

Nous considérons enfin la limite de la série double:

$$\sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^m . \frac{1}{(2p+1)^3} \cdot \frac{\cos am\left(\frac{2nK + (2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin am\left(\frac{2nK + (2m-1)iK'}{2p+1}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2} - \sin^2 am\left(\frac{2nK + (2m-1)iK'}{2p+1}\right) . \frac{1 - \Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right) - \sin^2 am\left(\frac{2nK + (2m-1)iK'}{2p+1}\right)} .$$

Les premiers termes de cette série, tant que $\frac{2n}{2p+1}$ et $\frac{2m-1}{2p+1}$ tendent vers zéro, tendront vers les premiers termes de la série:

$$\sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^m \cdot \frac{1}{2nK+(2m-1)iK'} \cdot \frac{1}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}.$$

Or la limite de la différence de ces deux séries est zéro. En effet, si l'on désigne cette différence par F(p), et qu'on pose pour abréger: $\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1} = \varepsilon$, et:

$$\frac{\cos am\,\varepsilon}{\sin am\,\varepsilon} \cdot \frac{\frac{\sin^2 am(\frac{u}{2p+1})}{(\frac{u}{2p+1})^2} - \sin^2 am\,\varepsilon \cdot \frac{1-\Delta am(\frac{u}{2p+1})}{(\frac{u}{2p+1})^2}}{\sin^2 am(\frac{u}{2p+1}) - \sin^2 am\,\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{(\frac{u}{2p+1})^2-\varepsilon^2} = \varphi(\varepsilon)$$

on aura: $F(p) = \sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^m \cdot \frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^3}$.

La fonction $\varphi(\varepsilon)$ a une valeur finie pour toutes les valeurs de n et de m depuis 1 jusqu'à p, même si p croît indéfiniment. De là il suit que la limite de la série $\sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^m \cdot \frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}$ sera encore une quantité finie et enfin que: $\lim F(p) = \lim \sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^m \frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^3} = 0$. On a donc:

$$\lim \left\{ \frac{1}{(2p+1)^3} \cdot \sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m (-1)^m \cdot \frac{\cos am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}{\sin am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\frac{\sin^2 am(\frac{u}{2p+1})}{(\frac{u}{2p+1})^2} - \sin^2 am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}) \cdot \frac{1-\Delta am(\frac{u}{2p+1})}{(\frac{u}{2p+1})^2}}{\sin^2 am(\frac{u}{2p+1}) - \sin^2 am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})} \right\} =$$

$$= \sum_1^\infty{}_n \sum_1^\infty{}_m (-1)^m \cdot \frac{1}{2nK+(2m-1)iK'} \cdot \frac{1}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2)}.$$

Cette série est convergente en vertu du théorème 4 du paragraphe précédent, puisque tant que $\delta < 2$ l'expression:

$$\frac{n^{1+\delta}}{(2nK+(2m-1)iK')(u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2)} =$$

$$= \frac{1}{8n^{2-\delta}\left(K+(\frac{2m-1}{2n})iK'\right)\cdot\left((\frac{u}{2n})^2-(K+(\frac{2m-1}{2n})iK')^2\right)}$$

tandis que n croît indéfiniment, tend vers zéro pour toute valeur de m depuis 1 jusqu'à ∞, et pour toute valeur du rapport $\frac{2m-1}{2n}$ depuis zéro jusqu'à l'infini.

Si l'on change le signe de i, on aura de même:

$$\lim\Bigg\{\frac{1}{(2p+1)^3}\cdot\sum_1^p{}_n\sum_1^p{}_m(-1)^m\cdot\frac{\cos am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}{\sin am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\dfrac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}-\sin^2 am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)\cdot\dfrac{1-\Delta am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2}}{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)-\sin^2 am\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\Bigg\}=$$

$$=\sum_1^\infty{}_n\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\cdot\frac{1}{2nK-(2m-1)iK'}\cdot\frac{1}{u^2-(2nK-(2m-1)iK')^2}\cdot$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (6), on aura:

$$(7)\quad 1-\Delta am\,u=-\frac{2u^2}{K'}\cdot\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\cdot\frac{1}{2m-1}\cdot\frac{1}{u^2+(2m-1)^2K'^2}-$$

$$-2iu^2\cdot\sum_1^\infty{}_n\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\cdot\Bigg\{\frac{1}{2nK+(2m-1)iK'}\cdot\frac{1}{u^2-(2nK+(2m-1)iK')^2}-$$

$$-\frac{1}{2nK-(2m-1)iK'}\cdot\frac{1}{u^2-(2nK-(2m-1)iK')^2}\Bigg\}.$$

On peut mettre les formules (4), (5) et (7) sous une forme plus commode en décomposant les termes généraux des séries:

$$(8)\quad sin\,am\,u=\frac{1}{k}\Bigg\{\sum_1^\infty{}_m\left(\frac{1}{u+(2m-1)iK'}+\frac{1}{u-(2m-1)iK'}\right)$$

$$+\sum_1^\infty{}_n\sum_1^\infty{}_m(-1)^n\left(\frac{1}{u+2nK+(2m-1)iK'}+\frac{1}{u-2nK-(2m-1)iK'}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{u+2nK-(2m-1)iK'}+\frac{1}{u-2nK+(2m-1)iK'}\right)\Bigg\};$$

$$(9)\quad cos\,am\,u=-\frac{i}{k}\Bigg\{\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\left(\frac{1}{u+(2m-1)iK'}-\frac{1}{u-(2m-1)iK'}\right)+$$

$$+\sum_1^\infty{}_n\sum_1^\infty{}_m(-1)^{n+m}\left(\frac{1}{u+2nK+(2m-1)iK'}-\frac{1}{u-2nK-(2m-1)iK'}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{u+2nK-(2m-1)iK'}+\frac{1}{u-2nK+(2m-1)iK'}\right)\Bigg\};$$

$$(10)\quad 1-\Delta am\,u=i\Bigg\{\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\left(\frac{1}{u+(2m-1)iK'}-\frac{1}{u-(2m-1)iK'}-\frac{2}{(2m-1)iK'}\right)+$$

$$+\sum_1^\infty{}_n\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\cdot\left(\frac{1}{u+2nK+(2m-1)iK'}-\frac{1}{u-2nK-(2m-1)iK'}-\frac{2}{2nK+(2m-1)iK'}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{u+2nK-(2m-1)iK'}+\frac{1}{u-2nK+(2m-1)iK'}+\frac{2}{2nK-(2m-1)iK'}\right)\Bigg\}.$$

Mais il faut ici remarquer qu'on ne doit jamais séparer les termes sous les signes de sommation à moins que les séries restent toujours convergentes.

38. Dans les formules précédentes on peut effectuer une des deux sommations, ou celle par rapport à n, ou celle par rapport à m. Dans ce but on commence par faire converger le module k vers l'unité. Alors l'intégrale: $u=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}}$ deviendra: $u=\int_0^x\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log\text{nat}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

De là on tire: $x=\sin\text{am}\,u=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}$, $\cos\text{am}\,u=\Delta\text{am}\,u=\frac{2}{e^u+e^{-u}}$.

De plus, puisque u croîtra indéfiniment, tandis que x s'approchera de l'unité, on aura $K=\infty$, et puisque $k=1$ donne $k'=0$, on aura: $K'=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$.

En substituant ces valeurs dans les formules (8), (9) et (10) du paragraphe précédent, on aura:

$$(1)\qquad \frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}=\sum_1^\infty{}_m\left(\frac{1}{u+(2m-1)i.\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{u-(2m-1)i.\frac{\pi}{2}}\right),$$

$$(2)\qquad \frac{2}{e^u+e^{-u}}=-i\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\left(\frac{1}{u+(2m-1)i.\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{u-(2m-1)i.\frac{\pi}{2}}\right).$$

Si l'on pose ici $i\left(u+\frac{\pi}{2}\right)$ au lieu de u, et n au lieu de m, et qu'on remarque que:

$$e^{i\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}+e^{-i\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}=2\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin u,$$

$$e^{i\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}-e^{-i\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}=2i\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)=2i\cos u,$$

on trouvera les formules connues:

$$(3)\quad \cot g\,u=\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{1}{u+n\pi}+\frac{1}{u-(n-1)\pi}\right)=\frac{1}{u}+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{1}{u+n\pi}+\frac{1}{u-n\pi}\right),$$

$$(4)\quad \frac{1}{\sin u}=\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\left(\frac{1}{u+n\pi}-\frac{1}{u-(n-1)\pi}\right)=\frac{1}{u}+\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\left(\frac{1}{u+n\pi}+\frac{1}{u-n\pi}\right).$$

Avant d'employer ces formules à la sommation des séries (8), (9) et (10) du paragraphe précédent par rapport à m ou par rapport à n, on peut les mettre sous une forme plus commode à ce but en substituant dans les formules (1) et (2) $\frac{\pi u}{2K'}$ au lieu de u, et dans les formules (3) et (4) $\frac{\pi u}{2K}$ au lieu de u. On aura alors:

$$(5)\quad \sum_1^{\infty}{}_m\left(\frac{1}{u+(2m-1)iK'}+\frac{1}{u-(2m-1)iK'}\right)=\frac{\pi}{2K'}\cdot\frac{e^{\frac{\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{e^{\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}},$$

$$(6)\quad \sum_1^{\infty}{}_m(-1)^m\left(\frac{1}{u+(2m-1)iK'}-\frac{1}{u-(2m-1)iK'}\right)=\frac{\pi i}{K'}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}},$$

$$(7)\quad \frac{1}{u}+\sum_1^{\infty}{}_n\left(\frac{1}{u+2nK}+\frac{1}{u-2nK}\right)=\frac{\pi}{2K}\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi u}{2K}\right),$$

$$(8)\quad \frac{1}{u}+\sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n\left(\frac{1}{u+2nK}+\frac{1}{u-2nK}\right)=\frac{\pi}{2K}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}$$

39. Si l'on effectue maintenant dans les équations (8), (9) et (10) du **37** la sommation par rapport à m à l'aide des formules (5) et (6) du paragraphe précédent, on trouvera:

$$(1)\quad \operatorname{sin\,am}u=\frac{\pi}{2kK'}\left\{\frac{e^{\frac{\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{e^{\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}+\right.$$

$$\left.+\sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n\left(\frac{e^{\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}-e^{-\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}+e^{-\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}}+\frac{e^{\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}-e^{-\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}+e^{-\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{2kK'}\left\{\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+\sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n\left(\frac{1-e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}-\frac{1-e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right)\right\};$$

$$(2)\quad \operatorname{cos\,am}u=\frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{1}{e^{\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}+\right.$$

$$\left.+\sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}+e^{-\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}}+\frac{1}{e^{\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}+e^{-\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+\sum_1^{\infty}{}_n(-1)^n\left(\frac{e^{-\frac{n\pi K}{K'}}.e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+\frac{e^{-\frac{n\pi K}{K'}}.e^{\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right)\right\};$$

$$(3)\quad 1-\mathcal{A}\mathrm{am}\,u=\frac{\pi}{K'}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}+\right.$$

$$\left.+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{2}{e^{\frac{n\pi K}{K'}}+e^{-\frac{n\pi K}{K'}}}-\frac{1}{e^{\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}+e^{-\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}}-\frac{1}{e^{\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}+e^{-\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{K'}\left\{\frac{1}{2}-\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{2e^{-\frac{n\pi K}{K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}}-\frac{e^{-\frac{n\pi K}{K'}}.e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}-\frac{e^{-\frac{n\pi K}{K'}}.e^{\frac{2K'}{\pi u}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right)\right\}.$$

Si l'on pose pour abréger: $e^{-\frac{\pi K}{K'}}=p$, où, parce que la partie réelle du rapport $\frac{K}{K'}$ suivant **17** est toujours positive, la quantité p, ou, si elle est imaginaire, son module, sera toujours plus petit que l'unité, on aura:

$$(4)\quad \sin\mathrm{am}\,u=\frac{\pi}{2kK'}\left\{\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+\sum_1^\infty(-1)^n\left(\frac{1-p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}-\frac{1-p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{1}{2}-\frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+e^{\frac{\pi u}{K'}}.\sum_1^\infty(-1)^n.\frac{p^{2n}}{1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}-e^{-\frac{\pi u}{K'}}.\sum_1^\infty(-1)^n.\frac{p^{2n}}{1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\right\}$$

$$(5)\quad \cos\mathrm{am}\,u=\frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty(-1)^n.\frac{p^n}{1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+e^{\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty(-1)^n.\frac{p^n}{1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\};$$

$$(6)\quad 1-\mathcal{A}\mathrm{am}\,u=\frac{\pi}{K'}\left\{\frac{1}{2}-\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+2\sum_1^\infty\frac{p^n}{1+p^{2n}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty\frac{p^n}{1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}-e^{\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty\frac{p^n}{1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\}.$$

Si dans la dernière équation on pose: $u=K+iK'$, on trouvera:

$\Delta \operatorname{am} u = o,\ e^{-\frac{\pi u}{2K'}} = -i\sqrt{p},\ e^{\frac{\pi u}{2K'}} = +\frac{i}{\sqrt{p}},\ e^{-\frac{\pi u}{K'}} = -p,\ e^{\frac{\pi u}{K'}} = -\frac{1}{p},$

et de là:

$$(7)\quad 1 = \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{p}}{1-p} + 2\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n}} + i\sqrt{p}\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1-p^{2n+1}} - \frac{i}{\sqrt{p}}\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1-p^{2n-1}}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2K'}\left\{1 + 4\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n}}\right\}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (6), on trouvera:

$$(8)\quad \Delta \operatorname{am} u = \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + e^{-\frac{\pi u}{2K'}}\cdot\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + e^{\frac{\pi u}{2K'}}\cdot\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\}.$$

40. Si l'on effectue la sommation des formules du **37** par rapport à n à l'aide des formules (7) et (8) du **38**, on trouvera:

$$(1)\quad \sin \operatorname{am} u = \frac{\pi}{2kK}\sum_1^\infty{}_m \left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K}\right)}\right\};$$

$$(2)\quad \cos \operatorname{am} u = -\frac{i\pi}{2kK}\sum_1^\infty{}_m (-1)^m \left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K}\right)}\right\};$$

$$(3)\quad 1 - \Delta \operatorname{am} u = \frac{i\pi}{2K}\sum_1^\infty{}_m (-1)^m \left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K}\right) - 2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(2m-1)iK'}{2K}\right)\right\}.$$

On réduit ces formules à des formes réelles en K et K' en remarquant que:

$$\frac{1}{\sin(a+ib)} + \frac{1}{\sin(a-ib)} = \frac{2\sin a\cdot\cos(ib)}{\sin^2 a - \sin^2(ib)} = \frac{\sin a(e^{-b}+e^{b})}{\sin^2 a + \frac{1}{4}(e^{-b}-e^{b})^2} =$$

$$= \frac{4\sin a\cdot e^{-b}(1+e^{-2b})}{4e^{-2b}\sin^2 a + (1-e^{-2b})^2} = \frac{4\sin a\cdot e^{-b}(1+e^{-2b})}{1-2e^{-2b}(1-2\sin^2 a)+e^{-4b}} = \frac{4\sin a\cdot e^{-b}(1+e^{-2b})}{1-2e^{-2b}\cos(2a)+e^{-4b}};$$

$$\frac{1}{\sin(a+ib)} - \frac{1}{\sin(a-ib)} = -\frac{2\cos a\cdot\sin(ib)}{\sin^2 a - \sin^2(ib)} = -\frac{1}{i}\cdot\frac{\cos a\,(e^{-b}-e^{b})}{\sin^2 a + \frac{1}{4}(e^{-b}-e^{b})^2} =$$

$$= \frac{1}{i}\cdot\frac{4\cos a\cdot e^{-b}(1-e^{-2b})}{1-2e^{-2b}\cos(2a)+e^{-4b}};$$

$$\operatorname{cotg}(a+ib)-\operatorname{cotg}(a-ib)-2\operatorname{cotg}(ib) = -\frac{2\sin^2 a\cdot\operatorname{cotg}(ib)}{\sin^2 a - \sin^2(ib)} = -i\cdot\frac{2\sin^2 a\cdot\frac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}}{\sin^2 a + \frac{1}{4}(e^{-b}-e^{b})^2} =$$

$$= i\cdot\frac{8\sin^2 a\cdot e^{-2b}}{1-2e^{-2b}\cos(2a)+e^{-4b}}\cdot\frac{1+e^{-2b}}{1-e^{-2b}}.$$

Si l'on pose pour abréger: $e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$, où, parce que la partie réelle du rapport $\frac{K'}{K}$ est toujours positive, la quantité q, ou, si elle est imaginaire, son module, sera toujours plus petit que l'unité, on aura:

(4) $$\sin am\, u = \frac{2\pi}{kK}.\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\sum_1^\infty{}_m \frac{(1+q^{2m-1})\sqrt{q^{2m-1}}}{1-2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}};$$

(5) $$\cos am\, u = -\frac{2\pi}{kK}.\cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\sum_1^\infty{}_m (-1)^m.\frac{(1-q^{2m-1})\sqrt{q^{2m-1}}}{1-2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}};$$

(6) $$\Delta am\, u = 1+\frac{4\pi}{K}.\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\sum_1^\infty{}_m (-1)^m.\frac{q^{2m-1}}{1-2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}}.\frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}.$$

41. Si l'on substitue dans les formules des deux paragraphes précédents $u+K$ au lieu de u, on trouvera les formules suivantes, qui donnent le développement en séries infinies de: $\sin am(u+K) = \frac{\cos am\, u}{\Delta am\, u}$, $\cos am(u+K) = -k'.\frac{\sin am\, u}{\Delta am\, u}$, $\Delta am(u+K) = \frac{k'}{\Delta am\, u}$. Les formules du **39** donneront alors en remarquant que:

$$e^{-\frac{\pi(u+K)}{K'}} = p.e^{-\frac{\pi u}{K'}},\quad e^{\frac{\pi(u+K)}{K'}} = \frac{e^{\frac{\pi u}{K'}}}{p}:$$

(1) $$\frac{\cos am\, u}{\Delta am\, u} = \frac{\pi}{kK'}\left\{\tfrac{1}{2}+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\sum_1^\infty{}_n (-1)^n\frac{p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+e^{\frac{\pi u}{K'}}\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\frac{p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\};$$

(2) $$\frac{\sin am\, u}{\Delta am\, u} = \frac{\pi}{kk'K'}\left\{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{\sqrt{p^{2n-1}}}{1+p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}-e^{\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{\sqrt{p^{2n-1}}}{1+p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\};$$

(3) $$\frac{1}{\Delta am\, u} = \frac{\pi}{k'K'}.\left\{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty{}_n\frac{\sqrt{p^{2n-1}}}{1+p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+e^{\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty{}_n\frac{\sqrt{p^{2n-1}}}{1+p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\}.$$

(4) $$\frac{\cos am\, u}{\Delta am\, u} = \frac{2\pi}{kK}.\cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\sum_1^\infty{}_m\frac{(1+q^{2m-1})\sqrt{q^{2m-1}}}{1+2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}};$$

(5) $$\frac{\sin am\, u}{\Delta am\, u} = -\frac{2\pi}{kk'K}.\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{(1-q^{2m-1})\sqrt{q^{2m-1}}}{1+2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}};$$

(6) $$\frac{1}{\Delta am\, u} = \frac{1}{k'}+\frac{4\pi}{k'K}.\cos^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{q^{2m-1}}{1+2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}}.\frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}.$$

42. Si dans les formules (4), (5) et (8) du **39** et (1), (2) et (3) du **40** on pose $u + iK'$ au lieu de u, on trouvera:

$$(1)\quad \frac{1}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{K'}\left\{\tfrac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + e^{-\frac{\pi u}{K'}}\sum_1^\infty{}_n(-1)^n \frac{p^{2n}}{1-p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}} - e^{\frac{\pi u}{K'}}\sum_1^\infty{}_n(-1)^n \frac{p^{2n}}{1-p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\};$$

$$(2)\quad \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{2K'}}} + e^{-\frac{\pi u}{2K'}}\sum_1^\infty{}_n(-1)^n \frac{p^n}{1-e^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}} - e^{\frac{\pi u}{2K'}}\sum_1^\infty{}_n(-1)^n \frac{p^n}{1-p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\};$$

$$(3)\quad \frac{\cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + e^{-\frac{\pi u}{2K'}}\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1-p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}} - e^{\frac{\pi u}{2K'}}\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1-p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\};$$

$$(4)\quad \frac{1}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 4\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)\sum_1^\infty{}_m \frac{(1+q^{2m})q^m}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}\right\};$$

$$(5)\quad \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 4\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)\sum_1^\infty{}_m(-1)^m \frac{(1+q^{2m})q^m}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}\right\};$$

$$(6)\quad \frac{\cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + 4\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right)\sum_1^\infty{}_m(-1)^m \frac{q^{2m}}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}\right\};$$

et de plus l'équation:

$$(7)\quad 1 = \frac{\pi}{2K}\left\{1 - 4\sum_1^\infty{}_m(-1)^m \cdot \frac{q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\right\}.$$

Les deux dernières équations se trouvent de la manière suivante. En substituant dans l'équation (3) du **40** $u + iK'$ au lieu de u, on trouve:

$$1 + i\cdot\frac{\cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{i\pi}{2K}\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(u+2miK')}{2K}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(u-2(m-1)iK')}{2K}\right) - 2\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(2m-1)iK'}{2K}\right)\right\} =$$

$$= \frac{i\pi}{2K}\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\left\{\frac{2q^{2m}\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right) - i(1-q^{4m})}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}} - \frac{2q^{2(m-1)}\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right) + i(1-q^{4(m-1)})}{1-2q^{2(m-1)}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4(m-1)}} + 2i\cdot\frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\right\} =$$

$$= \frac{i\pi}{2K}\left\{\sum_1^\infty{}_m(-1)^m \frac{2q^{2m}\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right)}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}} - \sum_1^\infty{}_m(-1)^m \frac{2q^{2(m-1)}\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right)}{1-2q^{2(m-1)}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4(m-1)}}\right\} +$$

$$+\frac{\pi}{2K}\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\left\{\frac{1-q^{4m}}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}+\frac{1-q^{4(m-1)}}{1-2q^{2(m-1)}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4(m-1)}}-2\frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\right\}=$$

$$=\frac{i\pi}{2K}\left\{\frac{2\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)\right)}+4\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right)\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{q^{2m}}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}\right\}+$$

$$+\frac{\pi}{2K}\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\left\{1+\frac{2(q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)-q^{4m})}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}+1+\frac{2\left(q^{2(m-1)}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)-q^{4(m-1)}\right)}{1-2q^{2(m-1)}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4(m-1)}}-\right.$$

$$\left.-2-\frac{4q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\right\}=$$

$$=\frac{i\pi}{2K}\left\{\cot g\left(\frac{\pi u}{2K}\right)+4\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right)\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\frac{q^{2m}}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}\right\}+$$

$$+\frac{\pi}{2K}\left\{2\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\frac{q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)-q^{4m}}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}+2\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{q^{2(m-1)}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)-q^{4(m-1)}}{1-2q^{2(m-1)}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4(m-1)}}-\right.$$

$$\left.-4\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\frac{q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\right\}=$$

$$=\frac{i\pi}{2K}\left\{\cot g\left(\frac{\pi u}{2K}\right)+4\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right)\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{q^{2m}}{1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}\right\}+$$

$$+\frac{\pi}{2K}\left\{-\frac{2\left(\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)-1\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)\right)}-4\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\frac{q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\right\},$$

d'où l'on tire les équations (6) et (7). Nous rappelons ici la remarque faite pag. 105, qu'on ne peut pas faire: $\sum_1^\infty{}_n(f(n)+\varphi(n))=\sum_1^\infty{}_n f(n)+\sum_1^\infty{}_n\varphi(n)$, qu'autant que non seulement $\sum_1^\infty{}_n(f(n)+\varphi(n))$, mais aussi $\sum_1^\infty{}_n f(n)$ et $\sum_1^\infty{}_n\varphi(n)$ sont des séries convergentes. Il suit de là qu'on n'a pas: $\sum_1^\infty{}_n(f(n)+f(n-1)+\varphi(n))=f(o)+\sum_1^\infty{}_n(f(n)+\varphi(n))$, qu'autant que $\sum_1^\infty{}_n f(n)$ et $\sum_1^\infty{}_n\varphi(n)$ toutes les deux sont des séries convergentes.

43. Si enfin dans les formules des paragraphes **39** et **40**, on pose $u+K+iK'$ au lieu de u, ou, ce qui vaut le même, si dans les formules du paragraphe précédent on pose $u+K$ au lieu de u, on trouvera les formules:

$$(1)\quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{K'}\left\{\frac{1}{2}-e^{-\frac{\pi u}{K'}}.\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\frac{p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}-e^{\frac{\pi u}{K'}}.\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\frac{p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\};$$

$$(2)\quad \frac{1}{\cos\mathrm{am}\,u}=-\frac{\pi}{k'K'}\left\{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}\sum_1^\infty(-1)^n\frac{\sqrt{p^{2n-1}}}{1-p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+e^{\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\frac{\sqrt{p^{2n-1}}}{1-p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\};$$

$$(3)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}=-\frac{\pi}{k'K'}\left\{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty{}_n\frac{\sqrt{p^{2n-1}}}{1-p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}-e^{\frac{\pi u}{2K'}}.\sum_1^\infty{}_n\frac{\sqrt{p^{2n-1}}}{1-p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}}\right\};$$

$$(4)\quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\cos(\frac{\pi u}{2K})}+4\cos(\frac{\pi u}{2K})\sum_1^\infty{}_m\frac{(1+q^{2m})q^m}{1+2q^{2m}\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{4m}}\right\};$$

$$(5)\quad \frac{1}{\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2k'K}\left\{\frac{1}{\cos(\frac{\pi u}{2K})}+4\cos(\frac{\pi u}{2K})\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{(1+q^{2m})q^m}{1+2q^{2m}\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{4m}}\right\};$$

$$(6)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2k'K}\left\{\mathrm{tang}(\frac{\pi u}{2K})+4\sin(\frac{\pi u}{K})\sum_1^\infty{}_m(-1)^m\frac{q^{2m}}{1+2q^{2m}\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{4m}}\right\}.$$

44. Si l'on pose dans les formules précédentes 2u au lieu de u et les substitue dans les formules (9), (10) et (11) du **11**:

$$\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}=\frac{1}{k'^2}\left(\frac{\Delta\,\mathrm{am}(2u)}{\sin\mathrm{am}(2u)}-\frac{\cos\mathrm{am}(2u)}{\sin\mathrm{am}(2u)}\right),$$

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}=\frac{1}{\sin\mathrm{am}(2u)}+\frac{\cos\mathrm{am}\,(2u)}{\sin\mathrm{am}\,(2u)},$$

$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,(2u)}+\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(2u)}{\sin\mathrm{am}\,(2u)},$$

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}=\frac{\cos\mathrm{am}\,(2u)}{\sin\mathrm{am}\,(2u)}+\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(2u)}{\sin\mathrm{am}\,(2u)},$$

$$\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,(2u)}-\frac{\cos\mathrm{am}\,(2u)}{\sin\mathrm{am}\,(2u)},$$

$$\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}=\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,(2u)}-\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(2u)}{\sin\mathrm{am}\,(2u)}\right),$$

on trouvera de plus:

$$(1)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}=-\frac{2\pi}{k'^2K'}\left\{e^{-\frac{\pi u}{K'}}.\sum_1^\infty{}_n\frac{p^{2n-1}}{1-p^{2(2n-1)}.e^{-\frac{2\pi u}{K'}}}-e^{\frac{\pi u}{K'}}.\sum_1^\infty{}_n\frac{p^{2n-1}}{1-p^{2(2n-1)}e^{\frac{2\pi u}{K'}}}\right.$$

$$(2)\quad \frac{\cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{\pi u}{K'}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1-(-1)^n p^n e^{-\frac{\pi u}{K'}}} - e^{\frac{\pi u}{K'}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1-(-1)^n p^n e^{\frac{\pi u}{K'}}} \right\};$$

$$(3)\quad \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{1}{2} + \frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + \right.$$

$$\left. + e^{-\frac{\pi u}{K'}} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{p^n}{1-p^n e^{-\frac{\pi u}{K'}}} - e^{\frac{\pi u}{K'}} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \frac{p^n}{1-p^n e^{\frac{\pi u}{K'}}} \right\};$$

$$(4)\quad \frac{\cos \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{2\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{2\pi u}{K'}}} + e^{-\frac{\pi u}{K'}} \sum_1^\infty{}_n \frac{p^{2n}}{1-p^{4n} e^{-\frac{2\pi u}{K'}}} - e^{\frac{\pi u}{K'}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{p^{2n}}{1-p^{4n} e^{\frac{2\pi u}{K'}}} \right\};$$

$$(5)\quad \frac{\sin \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{\pi u}{K'}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+(-1)^n p^n e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + e^{\frac{\pi u}{K'}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+(-1)^n p^n e^{\frac{\pi u}{K'}}} \right\};$$

$$(6)\quad \frac{\sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{k^2 K'}\left\{\frac{1}{2} - \frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{\pi u}{K'}} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \frac{p^n}{1+p^n e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + e^{\frac{\pi u}{K'}} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \frac{p^n}{1+p^n e^{\frac{\pi u}{K'}}} \right\};$$

$$(7)\quad \frac{\sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2k'^2 K}\left\{ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi u}{K}\right) \cdot \sum_1^\infty{}_m (-1)^m \cdot \frac{q^m}{1+2q^m \cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2m}} \right\};$$

$$(8)\quad \frac{\cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2K}\left\{ \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi u}{K}\right) \sum_1^\infty{}_m \frac{q^m}{1-(-1)^m \cdot 2q^m \cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2m}} \right\};$$

$$(9)\quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{K}\left\{\frac{1}{\sin(\frac{\pi u}{K})}+4\sin(\frac{\pi u}{K}).\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{q^{2m}(1+q^{4m})}{1-2q^{4m}\cos(\frac{2\pi u}{K})+q^{8m}}\right\};$$

$$(10)\quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2K}\left\{\cot g(\frac{\pi u}{2K})+4\sin(\frac{\pi u}{K}).\sum_{1}^{\infty}{}_{m}(-1)^{m}.\frac{q^{m}}{1-2q^{m}\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{2m}}\right\};$$

$$(11)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2K}\left\{\tan g(\frac{\pi u}{2K})+4\sin(\frac{\pi u}{K})\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{q^{m}}{1+(-1)^{m}2q^{m}\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{2m}}\right\};$$

$$(12)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}=\frac{4\pi}{k^{2}K}\sin(\frac{\pi u}{K})\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{q^{2m-1}(1+q^{2(2m-1)})}{1-2q^{2(2m-1)}\cos(\frac{2\pi u}{K})+q^{4(2m-1)}}.$$

En développant les formules (7), (8), (10) et (11) on remarque que:

$$1-2q^{2m}\cos(\frac{2\pi u}{K})+q^{4m}=(1+2q^{m}\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{2m}).(1-2q^{m}\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{2m}).$$

45. Nous développerons maintenant les fonctions elliptiques en séries de facteurs. Si l'on substitue dans les équations (10), (11), et (12) du **31** u au lieu de $(2p+1)u$, on aura:

$$(1)\quad \sin\mathrm{am}\,u=u\,.\,\frac{\sin\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{(\frac{u}{2p+1})}\,.$$

$$.\prod_{1}^{p}{}_{n}\frac{1-\dfrac{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})}}{1-k^{2}\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1}).\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}\,.\prod_{1}^{p}{}_{m}\frac{1-\dfrac{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}}{1-\dfrac{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1})}}\,.$$

$$.\prod_{1}^{p}{}_{n}\prod_{1}^{p}{}_{m}\frac{1-\dfrac{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}}{1-\dfrac{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}}\,.\,\frac{1-\dfrac{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{2nK-2miK'}{2p+1})}}{1-\dfrac{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{\sin^{2}\mathrm{am}(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1})}}\,;$$

(2) $\cos \operatorname{am} u = \cos \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)$.

$$\cdot \prod_1^p{}_n \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{(2n-1)K}{2p+1}\right)}}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)} \cdot \prod_1^p{}_m \frac{1-\frac{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)} \cdot \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{(2n-1)K+2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} \cdot \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{(2n-1)K-2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}};$$

(3) $\Delta \operatorname{am} u = \Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)$.

$$\cdot \prod_1^p{}_n \frac{1-k^2 \cdot \frac{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)} \cdot \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)} \cdot \prod_1^p{}_m \frac{1-k^2 \cdot \frac{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)} \cdot \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{(2n-1)K+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} \cdot \frac{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{(2n-1)K-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}{1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}.$$

On fait maintenant croître p indéfiniment. On aura alors:

$$\lim\left(\frac{\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)}\right) = 1, \quad \lim \cos \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) = 1, \quad \lim \Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) = 1.$$

Cherchons maintenant la limite de la série:

$$\prod_1^p{}_n \left(1-k^2 \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) \cdot \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right) = F(p).$$

Le logarithme de ce produit sera une somme:

$$\log F(p) = \sum_{1}^{p}{}_{n} \log\left(1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) . \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right).$$

Puisque ici $\sin \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)$ reste fini pour toutes les valeurs de $\frac{2n}{2p+1}$ depuis zéro jusqu'à l'unité, et puisque $\sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)$ tend vers zéro en même temps que $\frac{u}{2p+1}$, on aura pour des valeurs infinies de p:

$$\lim \log F(p) = -\lim \sum_{1}^{p}{}_{n} k^2 \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) . \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right) =$$

$$= -k^2 u^2 \lim \sum_{1}^{p}{}_{n} \frac{\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{(2p+1)^2} \cdot \frac{\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2} =$$

$$= -k^2 u^2 \lim \sum_{1}^{p}{}_{n} \frac{\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{(2p+1)^2} .$$

Or $\sin \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)$ est une quantité finie pour toute valeur de n depuis 1 jusqu'à p, même si p croît indéfiniment, donc $\lim \sum_{1}^{p}{}_{n} \frac{\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{2p+1}$ sera aussi une quantité finie; donc $\lim \sum_{1}^{p}{}_{n} \frac{\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{(2p+1)^2} = 0$, ou $\lim \log F(p) = 0$.

Donc enfin $\lim_{p=\infty} F(p) = \lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}{}_{n} \left(1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right) . \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right) = 1.$

De la même manière on trouvera:

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}{}_{n} \left(1 - \frac{\Delta^2 \mathrm{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}{\cos^2 \mathrm{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)} . \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right) = 1,$$

puisque la quantité: $\frac{\Delta \mathrm{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}{\cos \mathrm{am}\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)} = \Delta \mathrm{am}\left(\frac{2mK'}{2p+1}, k'\right)$ reste finie pour toute valeur de $\frac{2m}{2p+1}$ depuis zéro jusqu'à l'unité.

De même on trouvera encore:

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}{}_{n} \left(1 - k^2 . \frac{\cos^2 \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}{\Delta^2 \mathrm{am}\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)} . \sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)\right) = 1,$$

puisque la quantité: $\dfrac{\cos\mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})}{\Delta\,\mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})}$ reste finie pour toute valeur de $\dfrac{2n}{2p+1}$ depuis zéro jusqu'à l'unité.

Enfin on aura de même:

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}{}_m\left(1-k^2.\frac{\cos^2\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}{\Delta^2\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}.\sin^2\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})\right)=1,$$

puisque la quantité: $\dfrac{\cos\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}{\Delta\,\mathrm{am}(\frac{2miK'}{2p+1})}=\dfrac{1}{\Delta\,\mathrm{am}(\frac{2mK'}{2p+1},\,k')}$ reste finie pour toute valeur de $\dfrac{2m}{2p+1}$ depuis zéro jusqu'à l'unité.

Considérons maintenant la limite de la série: $\prod_{1}^{p}{}_n\left(1-\dfrac{\sin^2\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{\sin^2\mathrm{am}(\frac{2nK}{2p+1})}\right)$.

Les premiers facteurs de cette série, tant que $\dfrac{2n}{2p+1}$ tend vers zero, tendront vers les premiers facteurs de la série: $\prod_{1}^{p}{}_n\left(1-\dfrac{u^2}{(2nK)^2}\right)$. Or on peut démontrer que ces deux séries ont la même limite pour des valeurs infinies de p. En effet si l'on désigne par F(p) le rapport de ces deux séries et qu'on pose pour abréger:

$$\frac{2nK}{2p+1}=\varepsilon,\quad \frac{1}{1-(\frac{u}{2nK})^2}\left\{\frac{\sin^2\mathrm{am}(\frac{u}{2p+1})}{(\frac{u}{2p+1})^2}.\frac{1}{\sin^2\mathrm{am}\,\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right\}=\varphi(\varepsilon),$$

on aura: $F(p)=\prod_{1}^{p}{}_n\left(1-(\frac{u}{2p+1})^2.\varphi(\varepsilon)\right)$, et de là:

$$\log F(p)=\sum_{1}^{p}{}_n\log\left(1-(\frac{u}{2p+1})^2.\varphi(\varepsilon)\right).$$

Or $\varphi(\varepsilon)$ est une quantité finie pour toutes les valeurs de n depuis 1 jusqu'à p, même si p croît indéfiniment. En effet $\sin\mathrm{am}\,\varepsilon$ ne peut disparaître qu'avec ε, et alors on aura: $\varphi(\varepsilon)=\dfrac{1}{1-(\frac{u}{2nK})^2}.\dfrac{1+k^2}{3}$.

Donc on aura:

$$\lim_{p=\infty}\log F(p)=-u^2\lim_{p=\infty}\sum_{1}^{p}{}_n\frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}.$$

Puisque $\varphi(\varepsilon)$ est une quantité finie pour toutes les valeurs de n depuis 1 jusqu'à p, la limite de $\sum_1^p{}_n \frac{\varphi(\varepsilon)}{2p+1}$ sera aussi une quantité finie, donc la limite de $\sum_1^p{}_n \frac{\varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}$ deviendra zéro, $\lim \log F(p) = o$, $\lim F(p) = 1$, ou:

$$\lim_{p=\infty} \prod_1^p{}_n \left(1 - \frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\frac{2nK}{2p+1}\right)}\right) = \prod_1^\infty{}_n \left(1 - \left(\frac{u}{2nK}\right)^2\right).$$

La dernière série de facteurs est convergente en vertu du théorème 6 du **36**, puisque: $n^{1+\delta} \cdot \left(\frac{u}{2nK}\right)^2 = \left(\frac{u}{2K}\right)^2 \cdot \frac{1}{n^{1-\delta}}$ tend vers zéro pour des valeurs infinies de n, tant que $\delta < 1$.

Si l'on pose 2n—1 au lieu de 2n on aura:

$$\lim_{p=\infty} \prod_1^p{}_n \left(1 - \frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\frac{(2n-1)K}{2p+1}\right)}\right) = \prod_1^\infty{}_n \left(1 - \left(\frac{u}{(2n-1)K}\right)^2\right).$$

De la même manière on trouve:

$$\lim_{p=\infty} \prod_1^p{}_m \left(1 - \frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)}\right) = \prod_1^\infty{}_m \left(1 - \left(\frac{u}{2miK'}\right)^2\right) = \prod_1^\infty{}_m \left(1 + \left(\frac{u}{2mK'}\right)^2\right),$$

puisque: $\sin^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right) = -\frac{\sin^2 am\left(\frac{2mK'}{2p+1}, k'\right)}{\cos^2 am\left(\frac{2mK'}{2p+1}, k'\right)}$ ne peut disparaître pour aucune valeur de m depuis 1 jusqu'à p, à moins que $\frac{2m}{2p+1}$ ne disparaît, et qu'alors:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{u}{2miK'}\right)^2}\left\{\frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 am\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)} - \frac{1}{\left(\frac{2miK'}{2p+1}\right)^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{u}{2mK'}\right)^2}\left\{-\frac{1}{\left(\frac{2mK'}{2p+1}\right)^2} - \frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2} \cdot \frac{\cos^2 am\left(\frac{2mK'}{2p+1}, k'\right)}{\sin^2 am\left(\frac{2mK'}{2p+1}, k'\right)}\right\}$$

tendra vers: $\frac{1}{1+\left(\frac{u}{2mK'}\right)^2} \cdot \frac{1+k'^2}{3}$.

Si l'on pose 2m—1 au lieu de 2m on aura:

$$\lim_{p=\infty} \prod_1^p{}_m \left(1 - \frac{\sin^2 am\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\frac{(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}\right) = \prod_1^\infty{}_m \left(1 + \left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2\right).$$

Nous considérons maintenant la limite de la série double:

$$\prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}.$$

Les premiers facteurs de cette série, tant que les coefficients $\frac{2n}{2p+1}$ et $\frac{2m}{2p+1}$ tendent tous les deux vers zéro, tendront vers les premiers facteurs de la série:

$$\prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \frac{1-\left(\dfrac{u}{2nK+2miK'}\right)^2}{1-\left(\dfrac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2}.$$

Or on peut démontrer que ces deux séries ont la même limite pour des valeurs infinies de p. En effet, si l'on désigne par F(p) le rapport de ces deux séries, et qu'on pose pour abréger:

$$\frac{2nK+2miK'}{2p+1}=\varepsilon,\quad \frac{1}{1-\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\varepsilon^2}}\left\{\frac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sin^2 am\,\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right\}=\varphi(\varepsilon),$$

on aura: $F(p)=\prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \dfrac{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{2nK+2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\left(\dfrac{u}{2nK+2miK'}\right)^2}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2}{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}$

$$=\prod_1^p{}_n \prod_1^p{}_m \frac{1-\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)^2\cdot\varphi(\varepsilon)}{1-\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)^2\cdot\varphi\left(\varepsilon-\dfrac{iK'}{2p+1}\right)}.$$

De là on trouvera:

$$\log F(p)=\sum_1^p{}_n \sum_1^p{}_m\left\{\log\left(1-\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2\cdot\varphi(\varepsilon)\right)-\log\left(1-\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2\cdot\varphi\left(\varepsilon-\frac{iK'}{2p+1}\right)\right)\right\}$$

Maintenant $\varphi(\varepsilon)$ est une quantité finie pour toutes les valeurs de n et de m depuis 1 jusqu'à p, même si p croît indéfiniment. En effet sin am ε ne peut disparaître qu'avec ε et alors on aura: $\varphi(\varepsilon)=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{u}{2nK+2miK'}\right)^2}\cdot\dfrac{1+k^2}{3}$.

Donc on aura:

$$\lim_{p=\infty} \log F(p) = -u^2 \lim_{p=\infty} \sum_{1}^{p}{}_{n} \sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon - \frac{iK'}{2p+1})}{(2p+1)^2},$$

ou puisque: $\lim_{p=\infty} \left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon - \frac{iK'}{2p+1})\right) = \lim_{p=\infty} \left(\frac{iK'}{2p+1} \cdot d_\varepsilon \varphi(\varepsilon)\right)$,

$$\lim_{p=\infty} \log F(p) = -iK'u^2 \lim_{p=\infty} \sum_{1}^{p}{}_{n} \sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{d_\varepsilon \varphi(\varepsilon)}{(2p+1)^3}.$$

Maintenant en différentiant la fonction $\varphi(\varepsilon)$ si l'on pose pour abréger:

$$\psi(\varepsilon) = \frac{1}{1 - \left(\frac{u}{2p+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^3} - \frac{\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2} \cdot \frac{\cos \mathrm{am}\,\varepsilon \,.\, \Delta \mathrm{am}\,\varepsilon}{\sin^3 \mathrm{am}\,\varepsilon} \right\},$$

on trouvera:

$$d_\varepsilon \varphi(\varepsilon) = -\frac{2\left(\frac{u}{2p+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^3}}{1 - \left(\frac{u}{2p+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}} \cdot \varphi(\varepsilon) + 2\psi(\varepsilon) =$$

$$= -\frac{2(2p+1)u^2 \cdot \varphi(\varepsilon)}{((2nK+2miK')^2 - u^2)(2nK+2miK')} + 2\psi(\varepsilon),$$

et on aura donc:

$$\lim_{p=\infty} \log F(p) = 2iK'u^4 \lim_{p=\infty} \left\{ \frac{1}{(2p+1)^2} \cdot \sum_{1}^{p}{}_{n} \sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{\varphi(\varepsilon)}{((2nK+2miK')^2 - u^2).(2nK+2miK')} \right\}$$

$$- 2iK'u^2 \lim_{p=\infty} \left\{ \sum_{1}^{p}{}_{n} \sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{\psi(\varepsilon)}{(2p+1)^3} \right\}.$$

Or en vertu du théorème 3 du **36** la série:

$\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \sum_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{1}{((2nK+2miK')^2 - u^2).(2nK+2miK')}$ est convergente, puisque, si l'on pose pour abréger $\frac{n}{m} = a$, l'expression:

$$\frac{n^{1+\delta} \cdot m^{1+\delta'}}{((2nK+2miK')^2 - u^2).(2nK+2miK')} = \frac{a^{1+\delta} \cdot m^{2+\delta+\delta'}}{(4m^2(aK+iK')^2 - u^2).2m(aK+iK')} =$$

$$= \frac{1}{8m^{1-\delta-\delta'} \left(a^{\frac{2-\delta}{3}} \cdot K + \frac{iK'}{a^{\frac{1+\delta}{3}}}\right)^3 - \frac{2u^2}{m^{1+\delta+\delta'}} \left(\frac{K}{a^{\delta}} + \frac{iK'}{a^{1+\delta}}\right)}$$

tend vers zéro pour des valeurs infinies de n et de m et pour une valeur quelconque depuis zéro jusqu'à l'infini du rapport $\frac{n}{m} = a$, à condition qu'on choisit les quantités positives δ et δ' telles que $\delta + \delta' < 1$. De plus $\varphi(\varepsilon)$ est toujours une quantité finie. De là il suit que la limite de la série:

$$\sum_{1}^{p}{}_{n} \sum_{1}^{p}{}_{m} \frac{\varphi(\varepsilon)}{((2nK+2miK')^2 - u^2).(2nK+2miK')}$$

sera aussi une quantité finie. Donc:

$$\lim_{p=\infty}\left\{\frac{1}{(2p+1)^2}\sum_1^p\sum_1^p\frac{\varphi(\varepsilon)}{((2nK+2miK')^2-u^2).(2nK+2miK')}\right\}=0.$$

La quantité $\psi(\varepsilon)$ reste toujours une quantité finie, réelle ou imaginaire, pour toutes les valeurs de n et de m depuis 1 jusqu'à p, même si p croît indéfiniment. En effet $\sin am\,\varepsilon$ ne peut pas disparaître à moins que $\frac{2n}{2p+1}$ et $\frac{2m}{2p+1}$ tous les deux ne tendent vers zéro, et alors $\psi(\varepsilon)$ tendra aussi vers zéro; et $\cos am\,\varepsilon\,.\,\Delta am\,\varepsilon$ ne peut pas devenir infini à moins que $\frac{2n}{2p+1}$ ne tend vers zéro et $\frac{2m}{2p+1}$ vers l'unité, et alors $\frac{\cos am\,\varepsilon\,.\,\Delta am\,\varepsilon}{\sin^3 am\,\varepsilon}$ tendra vers zéro. Donc $\psi(\varepsilon)$ reste toujours une quantité finie. De là il suit que la limite de la série double: $\sum_1^p\sum_1^p\frac{\psi(\varepsilon)}{(2p+1)^2}$ sera aussi une quantité finie, donc:

$$\lim_{p=\infty}\sum_1^p\sum_1^p\frac{\psi(\varepsilon)}{(2p+1)^3}=0.$$

Donc enfin on a: $\lim_{p=\infty}\log F(p)=0$, $\lim_{p=\infty}F(p)=1$, ou:

$$\lim_{p=\infty}\prod_1^p\prod_1^p\frac{1-\frac{\sin^2am(\frac{u}{2p+1})}{\sin^2am(\frac{2nK+2miK'}{2p+1})}}{1-\frac{\sin^2am(\frac{u}{2p+1})}{\sin^2am(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1})}}=\prod_1^\infty\prod_1^\infty\frac{1-(\frac{u}{2nK+2miK'})^2}{1-(\frac{u}{2nK+(2m-1)iK'})^2}$$

Cette dernière série est convergente en vertu du théorème 9 du **36**, puisque, si l'on pose pour abréger $\frac{n}{m}=a$, et si δ et δ' sont deux nombres positifs tels que $\delta+\delta'<1$, l'expression:

$$n^{1+\delta}.m^{1+\delta'}\left\{\left(\frac{u}{2nK+2miK'}\right)^2-\left(\frac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{u^2}{4}.a^{1+\delta}.m^{\delta+\delta'}\left\{\frac{1}{(aK+iK')^2}-\frac{1}{(aK+(1-\frac{1}{2m})\,iK')^2}\right\}=$$

$$=\frac{u^2}{4}.a^{1+\delta}.m^{\delta+\delta'}.\frac{\frac{1}{m}(1-\frac{1}{4m})K'^2-\frac{iaKK'}{m}}{(aK+iK')^2.(aK+(1-\frac{1}{2m})iK')^2}=$$

$$=\frac{u^2}{4}.\frac{1}{m^{1-\delta-\delta'}}.\frac{(1-\frac{1}{4m}).\frac{K'^2}{a}-iKK'}{a^{2-\delta}(K+\frac{iK'}{a})^2(K+(1-\frac{1}{2m}).\frac{iK'}{a})^2}$$

tend vers zéro pour des valeurs infinies de n et de m et pour une valeur quelconque du rapport $\frac{n}{m}=a$.

Si l'on change le signe de i, on aura:

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}{}_n \prod_{1}^{p}{}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{2nK-2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} = \prod_{1}^{\infty}{}_n \prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1-\left(\dfrac{u}{2nK-2miK'}\right)^2}{1-\left(\dfrac{u}{2nK-(2m-1)iK'}\right)^2}.$$

Si l'on pose 2n—1 au lieu de 2n, on aura:

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}{}_n \prod_{1}^{p}{}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{(2n-1)K+2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{(2n-1)K+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} = \prod_{1}^{\infty}{}_n \prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1-\left(\dfrac{u}{(2n-1)K+2miK'}\right)^2}{1-\left(\dfrac{u}{(2n-1)K+(2m-1)iK'}\right)^2}.$$

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}{}_n \prod_{1}^{p}{}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{(2n-1)K-2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{(2n-1)K-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} = \prod_{1}^{\infty}{}_n \prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1-\left(\dfrac{u}{(2n-1)K-2miK'}\right)^2}{1-\left(\dfrac{u}{(2n-1)K-(2m-1)iK'}\right)^2}.$$

Si dans les deux dernières équations on change entre eux n et m, K et iK', et qu'on renverse les fractions, on aura:

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}{}_n \prod_{1}^{p}{}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{(2n-1)K+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} = \prod_{1}^{\infty}{}_n \prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1-\left(\dfrac{u}{(2n-1)K+(2m-1)iK'}\right)^2}{1-\left(\dfrac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2}.$$

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}{}_n \prod_{1}^{p}{}_m \frac{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{(2n-1)K-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\sin^2 am\left(\dfrac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2 am\left(\dfrac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} = \prod_{1}^{\infty}{}_n \prod_{1}^{\infty}{}_m \frac{1-\left(\dfrac{u}{(2n-1)K-(2m-1)iK'}\right)^2}{1-\left(\dfrac{u}{2nK-(2m-1)iK'}\right)^2}.$$

Si l'on multiplie les deux dernières équations avec les deux équations précédentes, on aura enfin:

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}\prod_{1}^{p} \frac{1-\dfrac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(2n-1)K+2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK+(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} = \prod_{1}^{\infty}\prod_{1}^{\infty} \frac{1-\left(\frac{u}{(2n-1)K+2miK'}\right)^2}{1-\left(\frac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2};$$

$$\lim_{p=\infty} \prod_{1}^{p}\prod_{1}^{p} \frac{1-\dfrac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{(2n-1)K-2miK'}{2p+1}\right)}}{1-\dfrac{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{2p+1}\right)}{\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{2nK-(2m-1)iK'}{2p+1}\right)}} = \prod_{1}^{\infty}\prod_{1}^{\infty} \frac{1-\left(\frac{u}{(2n-1)K-2miK'}\right)^2}{1-\left(\frac{u}{2nK-(2m-1)iK'}\right)^2}.$$

En substituant ces valeurs dans les formules (1), (2) et (3), on aura:

$$(4)\quad \sin\mathrm{am}\,u = u.\prod_{1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{u}{2nK}\right)^2\right).\prod_{1}^{\infty}\frac{1+\left(\frac{u}{2mK'}\right)^2}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2}.$$

$$.\prod_{1}^{\infty}\prod_{1}^{\infty}\frac{1-\left(\frac{u}{2nK+2miK'}\right)^2}{1-\left(\frac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2}.\frac{1-\left(\frac{u}{2nK-2miK'}\right)^2}{1-\left(\frac{u}{2nK-(2m-1)iK'}\right)^2},$$

$$(5)\quad \cos\mathrm{am}\,u = \prod_{1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{u}{(2n-1)K}\right)^2\right).\prod_{1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2}.$$

$$.\prod_{1}^{\infty}\prod_{1}^{\infty}\frac{1-\left(\frac{u}{(2n-1)K+2miK'}\right)^2}{1-\left(\frac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2}.\frac{1-\left(\frac{u}{(2n-1)K-2miK'}\right)^2}{1-\left(\frac{u}{2nK-(2m-1)iK'}\right)^2};$$

$$(6)\quad \Delta\mathrm{am}\,u = \prod_{1}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2}.$$

$$.\prod_{1}^{\infty}\prod_{1}^{\infty}\frac{1-\left(\frac{u}{(2n-1)K+(2m-1)iK'}\right)^2}{1-\left(\frac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2}.\frac{1-\left(\frac{u}{(2n-1)K-(2m-1)iK'}\right)^2}{1-\left(\frac{u}{2nK-(2m-1)iK'}\right)^2}.$$

On peut réduire ces formules à une forme réelle par rapport à K et K' en remarquant que:

$$\left(1-\left(\frac{u}{a+ib}\right)^2\right).\left(1-\left(\frac{u}{a-ib}\right)^2\right)=\frac{\left(1+\left(\frac{u+a}{b}\right)^2\right).\left(1+\left(\frac{u-a}{b}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^2}.$$

Les équations précédentes deviendront alors:

$$(7)\quad \sin am\, u = u\,.\prod_1^\infty{}_n\left(1-\left(\frac{u}{2nK}\right)^2\right).\prod_1^\infty{}_m\frac{1+\left(\frac{u}{2mK'}\right)^2}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\prod_1^\infty{}_n\prod_1^\infty{}_m\frac{1+\left(\frac{u+2nK}{2mK'}\right)^2}{1+\left(\frac{u+2nK}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{u-2nK}{2mK'}\right)^2}{1+\left(\frac{u-2nK}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot\frac{\left(1+\left(\frac{2nK}{(2m-1)K'}\right)^2\right)^2}{\left(1+\left(\frac{2nK}{2mK'}\right)^2\right)^2};$$

$$(8)\quad \cos am\, u = \prod_1^\infty{}_n\left(1-\left(\frac{u}{(2n-1)K}\right)^2\right).\prod_1^\infty{}_m\frac{1}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\prod_1^\infty{}_n\prod_1^\infty{}_m\frac{1+\left(\frac{u+(2n-1)K}{2mK'}\right)^2}{1+\left(\frac{u+2nK}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{u-(2n-1)K}{2mK'}\right)^2}{1+\left(\frac{u-2nK}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot\frac{\left(1+\left(\frac{2nK}{(2m-1)K'}\right)^2\right)^2}{\left(1+\left(\frac{(2n-1)K}{2mK'}\right)^2\right)^2};$$

$$(9)\quad \Delta am\, u = \prod_1^\infty{}_m\frac{1}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\prod_1^\infty{}_n\prod_1^\infty{}_m\frac{1+\left(\frac{u+(2n-1)K}{(2m-1)K'}\right)^2}{1+\left(\frac{u+2nK}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{u-(2n-1)K}{(2m-1)K'}\right)^2}{1+\left(\frac{u-2nK}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot\frac{\left(1+\left(\frac{2nK}{(2m-1)K'}\right)^2\right)^2}{\left(1+\left(\frac{(2n-1)K}{(2m-1)K'}\right)^2\right)^2}.$$

De même à l'aide de la formule:

$$\left(1-\left(\frac{u}{a+ib}\right)^2\right).\left(1-\left(\frac{u}{a-ib}\right)^2\right)=\frac{\left(1-\left(\frac{u+ib}{a}\right)^2\right).\left(1-\left(\frac{u-ib}{a}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)^2},$$

on peut mettre les formules (4), (5) et (6) sous la forme:

$$(10)\quad \sin am\, u = u\,.\prod_1^\infty{}_n\left(1-\left(\frac{u}{2nK}\right)^2\right).\prod_1^\infty{}_m\frac{1+\left(\frac{u}{2mK'}\right)^2}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\prod_1^\infty{}_n\prod_1^\infty{}_m\frac{1-\left(\frac{u+2miK'}{2nK}\right)^2}{1-\left(\frac{u+(2m-1)iK'}{2nK}\right)^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{u-2miK'}{2nK}\right)^2}{1-\left(\frac{u-(2m-1)iK'}{2nK}\right)^2}\cdot\frac{\left(1+\left(\frac{(2m-1)K'}{2nK}\right)^2\right)^2}{\left(1+\left(\frac{2mK'}{2nK}\right)^2\right)^2};$$

(11) $$\cos\mathrm{am}\,u = \prod_1^\infty{}_n \left(1 - \left(\frac{u}{(2n-1)K}\right)^2\right) . \prod_1^\infty{}_m \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2} .$$

$$\prod_1^\infty{}_n \prod_1^\infty{}_m \frac{1 - \left(\frac{u+2miK'}{(2n-1)K}\right)^2}{1 - \left(\frac{u+(2m-1)iK'}{2nK}\right)^2} . \frac{1 - \left(\frac{u-2miK'}{(2n-1)K}\right)^2}{1 - \left(\frac{u-(2m-1)iK'}{2nK}\right)^2} . \frac{\left(1 + \left(\frac{(2m-1)K'}{2nK}\right)^2\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{2mK'}{(2n-1)K}\right)^2\right)^2} ;$$

(12) $$\Delta\,\mathrm{am}\,u = \prod_1^\infty{}_m \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2} .$$

$$\prod_1^\infty{}_n \prod_1^\infty{}_m \frac{1 - \left(\frac{u+(2m-1)iK'}{(2n-1)K}\right)^2}{1 - \left(\frac{u+(2m-1)iK'}{2nK}\right)^2} . \frac{1 - \left(\frac{u-(2m-1)iK'}{(2n-1)K}\right)^2}{1 - \left(\frac{u-(2m-1)iK'}{2nK}\right)^2} . \frac{\left(1 + \left(\frac{(2m-1)K'}{2nK}\right)^2\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{(2m-1)K'}{(2n-1)K}\right)^2\right)^2} .$$

46. Dans les équations (7), (8), (9), (10), (11) et (12) du paragraphe précédent on peut effectuer les multiplications par rapport à n, ou par rapport à m. On commence alors par faire converger le module k vers zéro ou vers l'unité. Pour effectuer les multiplications par rapport à n, on fait dans les équations (7), (8) et (9) le module k converger vers zéro; alors K convergera vers $\frac{\pi}{2}$, K' croîtra indéfiniment, sin am u convergera vers sin u, cos am u vers cos u, et Δ am u vers l'unité. Les équations (7), (8) et (9) donneront alors les formules connues:

(1) $$\sin u = u . \prod_1^\infty{}_n \left(1 - \left(\frac{u}{n\pi}\right)^2\right); \quad \cos u = \prod_1^\infty{}_n \left(1 - \left(\frac{2u}{(2n-1)\pi}\right)^2\right).$$

Avant d'employer ces formules aux multiplications par rapport à n dans les séries (10), (11) et (12) du paragraphe précédent, on les met sous une forme plus commode en substituant $\frac{\pi u}{2K}$ au lieu de u. Elles deviendront alors:

(2) $$\frac{2K}{\pi u}\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \prod_1^\infty{}_n \left(1 - \left(\frac{u}{2nK}\right)^2\right); \quad \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \prod_1^\infty{}_n \left(1 - \left(\frac{u}{(2n-1)K}\right)^2\right).$$

Si l'on effectue maintenant à l'aide de ces formules la multiplication par rapport à n dans les séries (10), (11) et (12) on aura:

$$\sin\mathrm{am}\,u = \frac{2K}{\pi}.\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) . \prod_1^\infty{}_m \frac{1 + \left(\frac{u}{2mK'}\right)^2}{1 + \left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2} . \frac{u+(2m-1)iK'}{u+2miK'} . \frac{\sin\left(\frac{\pi(u+2miK')}{2K}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K}\right)} .$$

$$\frac{u-(2m-1)iK'}{u-2miK'} . \frac{\sin\left(\frac{\pi(u-2miK')}{2K}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K}\right)} . \frac{(2miK')^2}{((2m-1)iK')^2} . \frac{\sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)iK'}{2K}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot 2miK'}{2K}\right)} =$$

$$= \frac{2K}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) \cdot \prod_1^\infty{}_m \frac{\sin\left(\frac{\pi(u+2miK')}{2K}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(u-2miK')}{2K}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K}\right)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)iK'}{2K}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot 2miK'}{2K}\right)}$$

$$\operatorname{cos\,am}\, u = \cos\frac{\pi u}{2K} \cdot \prod_1^\infty{}_m \frac{1}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2} \cdot \frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi(u+2miK')}{2K}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi(u-2miK')}{2K}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K}\right)} \cdot \left(\frac{2K}{\pi(2m-1)iK'}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)iK'}{2K}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi \cdot 2miK'}{2K}\right)} =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) \cdot \prod_1^\infty{}_m \frac{\cos\left(\frac{\pi(u+2miK')}{2K}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi(u-2miK')}{2K}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K}\right)} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)iK'}{2K}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi \cdot 2miK'}{2K}\right)};$$

$$\Delta \operatorname{am}\, u = \prod_1^\infty{}_m \frac{1}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^2} \cdot \frac{\pi(u+(2m-1)iK'}{2K} \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K} \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K}\right) \cdot \left(\frac{2K}{\pi(2m-1)iK'}\right)^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi(2m-1)iK'}{2K}\right)}$$

$$= -\prod_1^\infty{}_m \frac{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(u+(2m-1)iK')}{2K}\right) \cdot \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(u-(2m-1)iK')}{2K}\right)}{\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi(2m-1)iK'}{2K}\right)}.$$

Maintenant on a:

$$\frac{\sin(a+ib) \cdot \sin(a-ib)}{\sin^2(ib)} = \frac{\sin^2 a \cdot \cos^2(ib) - \cos^2 a \cdot \sin^2(ib)}{\sin^2(ib)} =$$

$$= -\frac{\sin^2 a(e^b+e^{-b})^2 + \cos^2 a(e^b-e^{-b})^2}{(e^b-e^{-b})^2} = -\frac{1-2e^{-2b}(\cos^2 a - \sin^2 a) + e^{-4b}}{(1-e^{-2b})^2} =$$

$$= -\frac{1-2e^{-2b} \cdot \cos 2a + e^{-4b}}{(1-e^{-2b})^2};$$

$$\frac{\cos(a+ib) \cdot \cos(a-ib)}{\cos^2(ib)} = \frac{\cos^2 a \cdot \cos^2(ib) - \sin^2 a \cdot \sin^2(ib)}{\cos^2(ib)} =$$

$$= \frac{\cos^2 a(e^b+e^{-b})^2 + \sin^2 a(e^b-e^{-b})^2}{(e^b+e^{-b})^2} = \frac{1+2e^{-2b}(\cos^2 a - \sin^2 a) + e^{-4b}}{(1+e^{-2b})^2} =$$

$$= \frac{1+2e^{-2b} \cdot \cos 2a + e^{-4b}}{(1+e^{-2b})^2};$$

$$\frac{\operatorname{cotg}(a+ib) \cdot \operatorname{cotg}(a-ib)}{\operatorname{cotg}^2(ib)} = -\frac{1+2e^{-2b} \cdot \cos 2a + e^{-4b}}{1-2e^{-2b} \cdot \cos 2a + e^{-4b}} \cdot \left(\frac{1-e^{-2b}}{1+e^{-2b}}\right)^2.$$

Donc, si l'on pose pour abrèger, comme plus haut, $e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$, on aura:

$$(3)\quad \operatorname{sin\,am}\,u = \frac{2K}{\pi}\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\ \frac{1-2q^{2m}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}}.\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}}\right)^{2};$$

$$(4)\quad \operatorname{cos\,am}\,u = \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1+2q^{2m}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}}.\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m}}\right)^{2};$$

$$(5)\quad \Delta\,\operatorname{am}\,u = \prod_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1+2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}}{1-2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}}.\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\right)^{2}.$$

47. Pour effectuer dans les équations (7), (8) et (9) du **45** les multiplications par rapport à m, on fait converger k vers l'unité dans les équations (10), (11) et 12). Alors K croîtra indéfiniment, K' convergera vers $\frac{\pi}{2}$, sin am u vers: $\frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}}$, cos am u et Δ am u vers: $\frac{2}{e^{u}+e^{-u}}$. On aura de là les formules connues:

$$(1)\quad \frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}} = u.\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1+\left(\frac{u}{m\pi}\right)^{2}}{1+\left(\frac{2u}{(2m-1)\pi}\right)^{2}};\quad \frac{2}{e^{u}+e^{-u}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1}{1+\left(\frac{2u}{(2m-1)\pi}\right)^{2}}.$$

Avant d'employer ces formules à la multiplication par rapport à m dans les séries (7), (8) et (9) du **45**, on les met sous une forme plus commode en substituant $\frac{\pi u}{2K'}$ au lieu de u. Elles deviendront alors:

$$(2)\quad \frac{2K'}{\pi u}.\frac{e^{\frac{\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{e^{\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1+\left(\frac{u}{2mK'}\right)^{2}}{1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^{2}};\quad \frac{e^{\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{2} = \prod_{1}^{\infty}{}_{m}\left(1+\left(\frac{u}{(2m-1)K'}\right)^{2}\right)$$

En employant ces formules les séries (7), (8) et (9) du **45** deviendront:

$$\operatorname{sin\,am}\,u = \frac{2K'}{\pi}.\frac{e^{\frac{\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{e^{\frac{\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}.\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left(1-\left(\frac{u}{2nK}\right)^{2}\right).$$

$$\frac{2K'}{\pi(u+2nK)}.\frac{e^{\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}-e^{-\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}+e^{-\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}}.\frac{2K'}{\pi(u-2nK)}.\frac{e^{\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}-e^{-\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}+e^{-\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}}$$

$$.\left(\frac{\pi.2nK}{2K'}.\frac{e^{\frac{\pi.2nK}{2K'}}+e^{-\frac{\pi.2nK}{2K'}}}{e^{\frac{\pi.2nK}{2K'}}-e^{-\frac{\pi.2nK}{2K'}}}\right)^{2} =$$

$$= \frac{2K'}{\pi} \cdot \frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \prod_1^\infty{}_n \frac{1-e^{-\frac{2n\pi K}{K'}} \cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}} \cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{2n\pi K}{K'}} \cdot e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}} \cdot e^{\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \left\{ \frac{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}}{1-e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}} \right\}^2;$$

$$\cos \text{am } u = \frac{2}{e^{\frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{\pi u}{2K'}}} \cdot \prod_1^\infty{}_n \left(1 - \left(\frac{u}{(2n-1)K}\right)^2\right).$$

$$\cdot \frac{2K'}{\pi(u+(2n-1)K)} \cdot \frac{e^{\frac{\pi(u+(2n-1)K)}{2K'}} - e^{-\frac{\pi(u+(2n-1)K)}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}} + e^{-\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{2K'}{\pi(u-(2n-1)K)} \cdot \frac{e^{\frac{\pi(u-(2n-1)K)}{2K'}} - e^{-\frac{\pi(u-(2n-1)K)}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}} + e^{-\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\pi(2n-1)K}{2K'} \cdot \frac{e^{\frac{\pi.2nK}{2K'}} + e^{-\frac{\pi.2nK}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(2n-1)K}{2K'}} - e^{-\frac{\pi(2n-1)K}{2K'}}}\right)^2 =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \prod_1^\infty{}_n \frac{1-e^{-\frac{(2n-1)\pi K}{K'}} \cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}} \cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{(2n-1)\pi K}{K'}} \cdot e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}} \cdot e^{\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \left\{ \frac{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}}{1+e^{-\frac{(2n-1)\pi K}{K'}}} \right\}^2$$

$$\Delta \text{ am } u = \frac{2}{e^{\frac{\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{\pi u}{2K'}}} \cdot \prod_1^\infty{}_n \frac{e^{\frac{\pi(u+(2n-1)K)}{2K'}} + e^{-\frac{\pi(u+(2n-1)K)}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}} + e^{-\frac{\pi(u+2nK)}{2K'}}} \cdot$$

$$\cdot \frac{e^{\frac{\pi(u-(2n-1)K)}{2K'}} + e^{-\frac{\pi(u-(2n-1)K)}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}} + e^{-\frac{\pi(u-2nK)}{2K'}}} \cdot \left(\frac{e^{\frac{\pi.2nK}{2K'}} + e^{-\frac{\pi.2nK}{2K'}}}{e^{\frac{\pi(2n-1)K}{2K'}} + e^{-\frac{\pi(2n-1)K}{2K'}}}\right)^2 =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \prod_1^\infty{}_n \frac{1+e^{-\frac{(2n-1)\pi K}{K'}} \cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}} \cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{(2n-1)\pi K}{K'}} \cdot e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}} \cdot e^{\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \left\{ \frac{1+e^{-\frac{2n\pi K}{K'}}}{1+e^{-\frac{(2n-1)\pi K}{K'}}} \right\}^2$$

Si l'on pose ici comme plus haut : $e^{-\frac{\pi K}{K'}} = p$, on aura enfin :

$$(3)\quad \operatorname{sin\,am}\, u = \frac{2K'}{\pi}\cdot\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\cdot\prod_1^\infty{}_n\frac{1-p^{2n}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\cdot\frac{1-p^{2n}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}\cdot\left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n}}\right)^2;$$

$$(4)\quad \operatorname{cos\,am}\, u = \frac{2e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\cdot\prod_1^\infty{}_n\frac{1-p^{2n-1}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\cdot\frac{1-p^{2n-1}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}\cdot\left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n-1}}\right)^2;$$

$$(5)\quad \Delta\operatorname{am}\, u = \frac{2e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\cdot\prod_1^\infty{}_n\frac{1+p^{2n-1}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}.e^{-\frac{\pi u}{K'}}}\cdot\frac{1+p^{2n-1}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}.e^{\frac{\pi u}{K'}}}\cdot\left(\frac{1+p^{2n}}{1+p^{2n-1}}\right)^2.$$

48. On peut facilement trouver le produit des facteurs indépendants de l'argument u dans les équations des deux paragraphes précédents. Ainsi si l'on pose $u = K$ dans les équations (3) et (5) du **46** on trouvera:

$$1 = \frac{2K}{\pi}\cdot\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}}\right)^2\cdot\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}}\right)^2$$

$$k' = \prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\right)^4.$$

Si l'on pose $u = K + iK'$, on aura:

$$\operatorname{sin\,am}\, u = \frac{1}{k},\quad \operatorname{cos\,am}\, u = -\frac{ik'}{k},$$

$$\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = \cos\left(\frac{i\pi K'}{2K}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi K'}{2K}}+e^{\frac{\pi K'}{2K}}}{2} = \frac{q^{\frac12}+q^{-\frac12}}{2} = \frac{1+q}{2\sqrt{q}},$$

$$\cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) = -\sin\left(\frac{i\pi K'}{2K}\right) = \frac{e^{\frac{\pi K'}{2K}}-e^{-\frac{\pi K'}{2K}}}{2i} = \frac{q^{-\frac12}-q^{\frac12}}{2i} = -\frac{i(1-q)}{2\sqrt{q}},$$

$$\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) = -\cos\left(\frac{i\pi K'}{K}\right) = -\frac{e^{-\frac{\pi K'}{K}}+e^{\frac{\pi K'}{K}}}{2} = -\frac{q+q^{-1}}{2} = -\frac{1+q^2}{2q},$$

$$1-2q^{2m}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m} = 1+(1+q^2)q^{2m-1}+q^{4m} = (1+q^{2m-1})(1+q^{2m+1}),$$

$$1-2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)} = 1+(1+q^2)q^{2m-2}+q^{2(2m-1)} = (1+q^{2m-2})(1+q^{2m}),$$

$$1+2q^{2m}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m} = 1-(1+q^2)q^{2m-1}+q^{4m} = (1-q^{2m-1})(1-q^{2m+1}),$$

$$\prod_1^\infty{}_m(1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}) = \prod_1^\infty{}_m(1+q^{2m-1})(1+q^{2m+1}) = \frac{1}{1+q}\cdot\prod_1^\infty{}_m(1+q^{2m-1})^2,$$

$$\prod_1^\infty{}_m(1-2q^{2m-1}.\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{2(2m-1)})=\prod_1^\infty{}_m(1+q^{2m-2})(1+q^{2m})=2\prod_1^\infty{}_m(1+q^{2m})^2,$$

$$\prod_1^\infty{}_m(1+2q^{2m}.\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{4m})=\prod_1^\infty{}_m(1-q^{2m-1})(1-q^{2m+1})=\frac{1}{1-q}\prod_1^\infty{}_m(1-q^{2m-1})^2.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (3) et (4) du **46** on trouvera:

$$\frac{1}{k}=\frac{K}{2\pi\sqrt{q}}.\prod_1^\infty{}_m(\frac{1+q^{2m-1}}{1+q^{2m}})^2.(\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}})^2,$$

$$\frac{k'}{k}=\frac{1}{4\sqrt{q}}.\prod_1^\infty{}_m(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m}})^4.$$

De ces équations on tire:

$$\prod_1^\infty{}_m(\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}})^2=\frac{\pi\sqrt[4]{q}}{K\sqrt{k}},$$

$$\prod_1^\infty{}_m(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m}})^2=\frac{2\sqrt{k'}.\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}},$$

$$\prod_1^\infty{}_m(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}})^2=\sqrt{k'}.$$

Les équations (3), (4) et (5) du **46** seront par là réduites à la forme:

$$(1)\quad \sin\mathrm{am}\,u=\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}.\sin(\frac{\pi u}{2K}).\prod_1^\infty{}_m\frac{1-2q^{2m}.\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{2(2m-1)}},$$

$$(2)\quad \cos\mathrm{am}\,u=\frac{2\sqrt{k'}.\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\cos(\frac{\pi u}{2K}).\prod_1^\infty{}_m\frac{1+2q^{2m}.\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{4m}}{1-2q^{2m-1}.\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{2(2m-1)}},$$

$$(3)\quad \Delta\,\mathrm{am}\,u=\sqrt{k'}.\prod_1^\infty{}_m\frac{1+2q^{2m-1}.\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{2(2m-1)}}{1-2q^{2m-1}.\cos(\frac{\pi u}{K})+q^{2(2m-1)}}.$$

De même si l'on pose $u=K$ dans les équations (3) et (5) du **47** on trouvera: $e^{-\frac{\pi u}{K'}}=p$, $e^{\frac{\pi u}{K'}}=\frac{1}{p}$, et:

$$1=\frac{2K'}{\pi}.\frac{1-p}{1+p}.\prod_1^\infty{}_n\frac{1-p^{2n+1}}{1+p^{2n+1}}.\frac{1-p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}}.(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n}})^2=$$

$$=\frac{2K'}{\pi}.\prod_1^\infty{}_n(\frac{1-p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}})^2.(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n}})^2.$$

$$k'=\frac{2\sqrt{p}}{1+p}.\prod_1^\infty{}_n\frac{1+p^{2n}}{1+p^{2n+1}}.\frac{1+p^{2n-2}}{1+p^{2n-1}}.(\frac{1+p^{2n}}{1+p^{2n-1}})^2=$$

$$=4\sqrt{p}.\prod_1^\infty{}_n(\frac{1+p^{2n}}{1+p^{2n-1}})^4.$$

Si l'on pose $u = K + iK'$ on aura $e^{-\frac{\pi u}{K'}} = -p$, $e^{\frac{\pi u}{K'}} = -\frac{1}{p}$, $e^{-\frac{\pi u}{2K'}} = -i\sqrt{p}$, et les équations (3) et (4) donneront:

$$\frac{1}{k} = \frac{2K'}{\pi} \cdot \frac{1+p}{1-p} \cdot \prod_1^\infty{}_n \frac{1+p^{2n+1}}{1-p^{2n+1}} \cdot \frac{1+p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}} \cdot \left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n}}\right)^2 =$$

$$= \frac{2K'}{\pi} \cdot \prod_1^\infty{}_n \left(\frac{1+p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n}}\right)^2 .$$

$$\frac{k'}{k} = \frac{2\sqrt{p}}{1-p} \cdot \prod_1^\infty{}_n \frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n+1}} \cdot \frac{1+p^{2n-2}}{1-p^{2n-1}} \cdot \left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n-1}}\right)^2 =$$

$$= 4\sqrt{p} \cdot \prod_1^\infty{}_n \left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n-1}}\right)^4 .$$

De là on tire:

$$\prod_1^\infty{}_n \left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n}}\right)^2 = \frac{\pi}{2K'\sqrt{k}},$$

$$\prod_1^\infty{}_n \left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n-1}}\right)^2 = \frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{k}\cdot\sqrt[4]{p}},$$

$$\prod_1^\infty{}_n \left(\frac{1+p^{2n}}{1+p^{2n-1}}\right)^2 = \frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt[4]{p}},$$

lesquelles formules on peut aussi déduire des précédentes en changeant entre elles les quantités k et k', donc K et K', q et p.

En substituant ces valeurs dans les équations (3), (4) et (5) du paragraphe précédent, on les réduira à la forme:

$$(4)\quad \operatorname{sin\,am}\, u = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \prod_1^\infty{}_n \frac{1-p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \frac{1-p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}},$$

$$(5)\quad \operatorname{cos\,am}\, u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt[4]{p}} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \prod_1^\infty{}_n \frac{1-p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \frac{1-p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}},$$

$$(6)\quad \Delta\operatorname{am}\, u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt[4]{p}} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \prod_1^\infty{}_n \frac{1+p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \cdot \frac{1+p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}}{1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}}.$$

49. Des développements précédents des fonctions elliptiques en produits d'un nombre infini de facteurs, on déduit les logarithmes des fonctions elliptiques développées en séries infinies.

Si l'on sort des formules (3), (4) et (5) du **46** on trouvera:

$$\log \sin \operatorname{am} u = \log\left(\frac{2K}{\pi}\right) + \log \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + 2\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-q^{2m-1}\right) - 2\sum_1^\infty{}_m \log(1-q^{2m}) +$$

$$+ \sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}\right) - \sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m-1}\cdot\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right);$$

$$\log \cos \operatorname{am} u = \log \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + 2\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-q^{2m-1}\right) - 2\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+q^{2m}\right) +$$

$$+ \sum_1^\infty{}_m \log\left(1+2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}\right) - \sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right);$$

$$\log \Delta \operatorname{am} u = 2\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-q^{2m-1}\right) - 2\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+q^{2m-1}\right) +$$

$$+ \sum_1^\infty{}_m \log\left(1+2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right) - \sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right).$$

Or on a pour des valeurs réelles de x plus petites que l'unité, et pour des valeurs imaginaires de x, dont le module est plus petit que l'unité:

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots = -\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot x^n,$$

$$\log(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \ldots = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot x^n,$$

$$\log(1+2x\cos\vartheta+x^2) = \log\left((1+xe^{i\vartheta})(1+xe^{-i\vartheta})\right) = \log(1+xe^{i\vartheta}) + \log(1+xe^{-i\vartheta}) =$$

$$= x(e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}) - \tfrac{1}{2}x^2(e^{2i\vartheta}+e^{-2i\vartheta}) + \tfrac{1}{3}x^3(e^{3i\vartheta}+e^{-3i\vartheta}) - \ldots. =$$

$$= 2\left(x\cos\vartheta - \tfrac{1}{2}x^2\cos(2\vartheta) + \tfrac{1}{3}x^3\cos(3\vartheta) - \ldots\right) = -2\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot x^n\cos(n\vartheta),$$

$$\log(1-2x\cos\vartheta+x^2) = -2\left(x\cos\vartheta + \tfrac{1}{2}x^2\cos(2\vartheta) + \tfrac{1}{3}x^3\cos(3\vartheta) + \ldots\right) = -2\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot x^n\cos(n\vartheta)$$

De plus on a:

$$\sum_1^\infty{}_m x^{2m-1} = x + x^3 + x^5 + \ldots = \frac{x}{1-x^2}; \quad \sum_1^\infty{}_m x^{2m} = x^2 + x^4 + x^6 + \ldots = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Donc on aura:

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+q^{2m}\right) = -\sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot q^{2mn} = -\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}};$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-q^{2m}\right) = -\sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot q^{2mn} = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}};$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+q^{2m-1}\right) = -\sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot q^{(2m-1)n} = -\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}};$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-q^{2m-1}\right) = -\sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot q^{(2m-1)n} = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}};$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}\right) = -2\sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot q^{2mn}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right) =$$

$$= -2\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}\right) = -2\sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot q^{2mn}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right) =$$

$$= -2\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right) = -2\sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot q^{(2m-1)n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right) =$$

$$= -2\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right) = -2\sum_1^\infty{}_m \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot q^{(2m-1)n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right) =$$

$$= -2\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right).$$

Ces séries sont convergentes, puisque q, ou le module de q, est plus petit que l'unité. De là on trouve de plus:

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-q^{2m-1}\right)-\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-q^{2m}\right) = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} =$$

$$= -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n(1-q^n)}{1-q^{2n}} = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+q^n};$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-q^{2m-1}\right)-\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+q^{2m}\right) = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}$$

$$= -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n(1-(-1)^n q^n)}{1-q^{2n}} = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n};$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-q^{2m-1}\right)-\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+q^{2m-1}\right) = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}} =$$

$$= -2\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}};$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}\right)-\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right) =$$

$$= 2\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+q^n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+2q^{2m}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}\right)-\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right) =$$

$$= 2\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_m \log\left(1+2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right)-\sum_1^\infty{}_m \log\left(1-2q^{2m-1}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right) =$$

$$= 4\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}\cdot\cos\left(\frac{(2n-1)\pi u}{K}\right).$$

En substituant ces valeurs on trouvera:

$$(1)\quad \log \sin \operatorname{am} u = \log\left(\frac{2K}{\pi}\right) + \log \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) - 2\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n} \cdot \frac{q^n}{1+q^n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right) =$$

$$= \log\left(\frac{2K}{\pi}\right) + \log \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) - 4\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n} \cdot \frac{q^n}{1+q^n} \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi u}{2K}\right);$$

$$(2)\quad \log \cos \operatorname{am} u = \log \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) - 4\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n} \cdot \frac{q^n}{1+(-1)^n q^n} \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi u}{2K}\right);$$

$$(3)\quad \log \Delta \operatorname{am} u = -8\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}} \cdot \sin^2\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2K}\right).$$

Si l'on part des formules (3), (4) et (5) du **47** on trouvera de même:

$$\log \sin \operatorname{am} u = \log\left(\frac{2K'}{\pi}\right) + \log\left(1 - e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \log\left(1 + e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) +$$

$$+ 2\sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n}\right) - 2\sum_1^\infty{}_n \log\left(1 - p^{2n}\right) +$$

$$+ \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 - p^{2n} e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) + \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 - p^{2n} e^{\frac{\pi u}{K'}}\right) -$$

$$- \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n} e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n} e^{\frac{\pi u}{K'}}\right);$$

$$\log \cos \operatorname{am} u = -\frac{\pi u}{2K'} + \log 2 - \log\left(1 + e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) + 2\sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n}\right) - 2\sum_1^\infty{}_p \log\left(1 - p^{2n-1}\right) +$$

$$+ \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 - p^{2n-1} e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) + \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 - p^{2n-1} e^{\frac{\pi u}{K'}}\right) -$$

$$- \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n} e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n} e^{\frac{\pi u}{K'}}\right);$$

$$\log \Delta \operatorname{am} u = -\frac{\pi u}{2K'} + \log 2 - \log\left(1 + e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) + 2\sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n}\right) - 2\sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n-1}\right) +$$

$$+ \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n-1} e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) + \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n-1} e^{\frac{\pi u}{K'}}\right) -$$

$$- \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n} e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n} e^{\frac{\pi u}{K'}}\right).$$

Or on a:

$$\sum_1^\infty{}_n \log\left(1 + p^{2n}\right) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m} \cdot \frac{p^{2m}}{1-p^{2m}}; \quad \sum_1^\infty{}_n \log\left(1-p^{2n}\right) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m} \cdot \frac{p^{2m}}{1-p^{2m}};$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log\left(1+p^{2n-1}\right) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m} \cdot \frac{p^m}{1-p^{2m}}; \quad \sum_1^\infty{}_n \log\left(1-p^{2n-1}\right) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m} \cdot \frac{p^m}{1-p^{2m}};$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log\left(1+p^{2n} e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) + \sum_1^\infty{}_n \log\left(1+p^{2n} e^{\frac{\pi u}{K'}}\right) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m} \cdot \frac{p^{2m}}{1-p^{2m}}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}} + e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}) + \sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m}\cdot\frac{p^{2m}}{1-p^{2m}}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}}+e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}) + \sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{p^m}{1-p^{2m}}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}}+e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}) + \sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m}\cdot\frac{p^m}{1-p^{2m}}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}}+e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right).$$

De là on trouve:

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n}) - \sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n}) = 2\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{2m-1}\cdot\frac{p^{2(2m-1)}}{1-p^{2(2m-1)}};$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n}) - \sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n-1}) = \sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m}\cdot\frac{p^m}{1+(-1)^m p^m};$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n}) - \sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n-1}) = \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{p^m}{1+p^m};$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}) + \sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}) - \sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}) - \sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}) =$$

$$= -2\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{2m-1}\cdot\frac{p^{2(2m-1)}}{1-p^{2(2m-1)}}\cdot\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{K'}}+e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{K'}}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}) + \sum_1^\infty{}_n \log(1-p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}) - \sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}) - \sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}) =$$

$$= -\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m}\cdot\frac{p^m}{1+(-1)^m p^m}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}}+e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n-1}e^{-\frac{\pi u}{K'}}) + \sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n-1}e^{\frac{\pi u}{K'}}) - \sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n}e^{-\frac{\pi u}{K'}}) - \sum_1^\infty{}_n \log(1+p^{2n}e^{\frac{\pi u}{K'}}) =$$

$$= -\sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{p^m}{1+p^m}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}}+e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right).$$

En substituant ces valeurs on trouvera:

$$(4)\quad \log \operatorname{sin\,am}\, u = \log\left(\frac{2K'}{\pi}\right) + \log(1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}) - \log(1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}) -$$

$$- 2\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{2m-1}\cdot\frac{p^{2(2m-1)}}{1-p^{2(2m-1)}}\cdot\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{K'}} - 2 + e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{K'}}\right) =$$

$$= \log\left(\frac{2K'}{\pi}\right) + \log(1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}) - \log(1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}) -$$

$$- 2\sum_1^\infty{}_m \frac{1}{2m-1}\cdot\frac{p^{2(2m-1)}}{1-p^{2(2m-1)}}\cdot\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right)^2;$$

$$(5)\quad \log\cos\mathrm{am}\,u = -\frac{\pi u}{2K'} + \log 2 - \log\left(1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \\ -\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1}{m}\cdot\frac{p^m}{1+(-1)^m p^m}\left(e^{-\frac{m\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{m\pi u}{2K'}}\right)^2;$$

$$(6)\quad \log\Delta\,\mathrm{am}\,u = -\frac{\pi u}{2K'} + \log 2 - \log\left(1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \\ -\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{p^m}{1+p^m}\left(e^{-\frac{m\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{m\pi u}{2K'}}\right)^2.$$

50. De la même manière on trouvera des équations du **48**:

$$(1)\quad \log\sin\mathrm{am}\,u = \log\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\right) + \log\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + 2\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+q^n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right),$$

$$(2)\quad \log\cos\mathrm{am}\,u = \log\left(\frac{2\sqrt{k'}\cdot\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\right) + \log\cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + 2\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n}\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right),$$

$$(3)\quad \log\Delta\,\mathrm{am}\,u = \log\sqrt{k'} + 4\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}\cdot\cos\left(\frac{(2n-1)\pi u}{K}\right),$$

$$(4)\quad \log\sin\mathrm{am}\,u = -\log\sqrt{k} + \log\left(1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \log\left(1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \\ -2\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1}{2m-1}\cdot\frac{p^{2(2m-1)}}{1-p^{2(2m-1)}}\cdot\left(e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{K'}}+e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{K'}}\right),$$

$$(5)\quad \log\cos\mathrm{am}\,u = \log\left(\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt[4]{p}}\right) - \frac{\pi u}{2K'} - \log\left(1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \\ -\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{1}{m}\cdot\frac{p^m}{1+(-1)^m p^m}\left(e^{-\frac{m\pi u}{K'}}+e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right),$$

$$(6)\quad \log\Delta\,\mathrm{am}\,u = \log\left(\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt[4]{p}}\right) - \frac{\pi u}{2K'} - \log\left(1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right) - \\ -\sum_{1}^{\infty}{}_{m}\frac{(-1)^m}{m}\cdot\frac{p^m}{1+p^m}\cdot\left(e^{-\frac{m\pi u}{K'}}+e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right).$$

51. En différentiant les formules des paragraphes précédents par rapport à u, on trouvera les séries nouvelles:

$$(1)\quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u.\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) - 4\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{q^n}{1+q^n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right\};$$

$$(2)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u.\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\mathrm{tang}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + 4\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right\};$$

$$(3)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}=\frac{4\pi}{k^2K}\sum_1^\infty{}_n\cdot\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{K}\right).$$

$$(4)\quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}=\frac{2\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{2\pi u}{K'}}}-\sum_1^\infty{}_m\frac{p^{2(2m-1)}}{1-p^{2(2m-1)}}\left(e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{K'}}-e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{K'}}\right)\right\}$$

$$(5)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2K'}\left\{\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+2\sum_1^\infty{}_m\frac{p^m}{1+(-1)^m p^m}\left(e^{-\frac{m\pi u}{K'}}-e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right)\right\};$$

$$(6)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2k^2K'}\left\{\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+2\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{p^m}{1+p^m}\left(e^{-\frac{m\pi u}{K'}}-e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right)\right\}.$$

On peut de là trouver le développement en séries infinies de l'inverse des fractions précédentes. En effet on a:

$$\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}-k^2.\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}=k'^2.\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u},$$

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}+k^2.\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}=\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u},$$

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}+\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,u}.$$

Si l'on remarque maintenant que:

$$\sum_1^\infty{}_n\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n}\cdot\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)-2\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{K}\right)=$$

$$=\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}.\sin\left(\frac{2n\pi u}{K}\right)+\sum_1^\infty{}_n\left(\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}-\frac{2q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}\right).\sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{K}\right)=$$

$$=\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}.\sin\left(\frac{2n\pi u}{K}\right)-\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}.\sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{K}\right)=\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\frac{q^n}{1+q^n}\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_n\frac{q^n}{1+q^n}.\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)-2\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}}.\sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{K}\right)=\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n}\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right);$$

$$\sum_1^\infty{}_n\frac{q^n}{1+q^n}\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)-\sum_1^\infty{}_n\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n}.\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)=-2\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2(2n-1)}}{1-q^{2(2n-1)}}\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{K}\right),$$

on trouvera des équations précédentes (1), (2) et (3).

$$(7)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2k'^2K}\left\{\tang\left(\frac{\pi u}{2K}\right)+4\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{q^n}{1+q^n}.\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right\};$$

$$(8)\quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\Delta\,\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2K}\left\{\cotg\left(\frac{\pi u}{2K}\right)-4\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{q^n}{1+(-1)^n q^n}.\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right\};$$

$$(9)\quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{K}\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi u}{K}\right)}+4\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2(2n-1)}}{1-q^{2(2n-1)}}\cdot\sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{K}\right)\right\};$$

De même on trouvera des équations précédentes (4), (5) et (6):

$$(10)\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}=\frac{2\pi}{k'^2K'}\sum_1^\infty{}_m\frac{p^{2m-1}}{1-p^{2(2m-1)}}\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{K'}}-e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{K'}}\right);$$

$$(11)\quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2K'}\left\{\frac{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+2\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{p^m}{1+(-1)^m p^m}.\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}}-e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right)\right.$$

$$(12)\quad \frac{\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2K'}\left\{\frac{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+2\sum_1^\infty{}_m\frac{p^m}{1+p^m}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}}-e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right)\right\}.$$

52. Des formules du paragraphe précédent on tire des développements nouvelles en séries infinies en ayant égard aux équations (9), 10) et (11) du **11.** De ces dernières équations on tire:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,(2u)}{\sin\mathrm{am}\,(2u)}=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}-k'^2\,\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}\right\},$$

$$\frac{\Delta\mathrm{am}\,(2u)}{\sin\mathrm{am}\,(2u)}=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}+k'^2\,\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}\right\},$$

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,(2u)}=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}+\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\mathrm{am}\,u}\right\}.$$

Si l'on substitue ici les valeurs des équations du paragraphe précédent, et qu'on pose $\frac{u}{2}$ au lieu de u, on trouvera:

$$(1)\quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,n}=\frac{\pi}{2K}\left\{\cot g\left(\frac{\pi u}{2K}\right)-4\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}.\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right\},$$

$$(2)\quad \frac{\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}-4\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}.\sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2K}\right)\right\},$$

$$(3)\quad \frac{1}{\sin\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}+4\sum_1^\infty{}_n\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}.\sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2K}\right)\right\}.$$

$$(4)\quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}-\sum_1^\infty{}_m\frac{p^{2m-1}}{1-p^{2m-1}}\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right)\right\},$$

$$(5)\quad \frac{\Delta\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}=\frac{\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}+\sum_1^\infty{}_m\frac{p^{2m-1}}{1+p^{2m-1}}\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right),\right.$$

$$(6)\quad \frac{1}{\sin \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2K'}\left\{\frac{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + 2\sum_1^\infty{}_m \frac{p^{2m}}{1+p^{2m}}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}} - e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right)\right\}.$$

53. Si dans les formules du paragraphe précédent on pose $u + K$ au lieu de u, on en trouvera:

$$(1)\quad \frac{\sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2k'K}\left\{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right\},$$

$$(2)\quad \frac{1}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2k'K}\left\{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2K}\right)\right\},$$

$$(3)\quad \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} - 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2K}\right)\right\},$$

$$(4)\quad \frac{\sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{k'K'}\sum_1^\infty{}_m \frac{\sqrt{p^{2m-1}}}{1-p^{2m-1}} \cdot \left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right),$$

$$(5)\quad \frac{1}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{k'K'}\sum_1^\infty{}_m \frac{\sqrt{p^{2m-1}}}{1+p^{2m-1}} \cdot \left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right),$$

$$(6)\quad \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u} = \frac{\pi}{2K'}\left\{1 + 2\sum_1^\infty{}_m \frac{p^m}{1+p^{2m}}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}} + e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right)\right\}.$$

54. Si dans les formules du **52** on pose $u + iK'$ au lieu de u, et qu'on remarque que:

$$\sin\left(\frac{i\pi K'}{2K}\right) = \frac{i}{2} \cdot \frac{1-q}{\sqrt{q}},\quad \cos\left(\frac{i\pi K'}{K}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1+q}{\sqrt{q}},$$

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi(u+iK')}{2K}\right) = \frac{2q \sin\left(\frac{\pi u}{K}\right) - i(1-q^2)}{1 - 2q\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) + q^2},$$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi(u+iK')}{2K}\right)} = 2 \cdot \frac{(1+q)\sqrt{q} \cdot \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) - i(1-q)\sqrt{q} \cdot \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{1 - 2q\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) + q^2},$$

$$\sin\left(\frac{n\pi(u+iK')}{K}\right) = \frac{1+q^{2n}}{2q^n} \sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right) + i \cdot \frac{1-q^{2n}}{2q^n} \cdot \cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right);$$

et enfin que K, K' et q sont des quantités réelles en même temps que u et k, on trouvera:

$$(1)\quad \sum_1^\infty{}_n q^n \cdot \sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right) = \frac{q \cdot \sin\left(\frac{\pi u}{K}\right)}{1 - 2q\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) + q^2},$$

$$(2)\quad \sum_1^\infty \sqrt{q^{2n-1}} \cdot \sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2K}\right) = \frac{(1+q)\sqrt{q}\cdot \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{1-2q\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^2},$$

$$(3)\quad \sum_1^\infty \sqrt{q^{2n-1}} \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2K}\right) = \frac{(1-q)\sqrt{q}\cdot \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{1-2q\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^2},$$

$$(4)\quad \Delta \operatorname{am} u = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{1-q^2}{1-2q\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^2} + 2\sum_1^\infty q^n \cdot \frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}} \cdot \cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right\},$$

$$(5)\quad \operatorname{cos am} u = \frac{\pi}{kK}\left\{\frac{(1-q)\sqrt{q}\cdot \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{1-2q\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^2} + \sum_1^\infty \sqrt{q^{2n-1}} \cdot \frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \cdot \cos\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2K}\right)\right\},$$

$$(6)\quad \sin \operatorname{am} u = \frac{\pi}{kK}\left\{\frac{(1+q)\sqrt{q}\cdot \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{1-2q\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^2} + \sum_1^\infty \sqrt{q^{2n-1}} \cdot \frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} \cdot \sin\left(\frac{(2n-1)\pi u}{2K}\right)\right\},$$

$$(7)\quad \Delta \operatorname{am} u = \frac{\pi}{K'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} - \sum_1^\infty (-1)^m \cdot \frac{p^{2m-1}}{1-p^{2m-1}}\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right)\right\},$$

$$(8)\quad \operatorname{cos am} u = \frac{\pi}{kK'}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + \sum_1^\infty (-1)^m \cdot \frac{p^{2m-1}}{1+p^{2m-1}}\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}} + e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right)\right\},$$

$$(9)\quad \sin \operatorname{am} u = \frac{\pi}{2kK'}\left\{\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} + 2\sum_1^\infty (-1)^m \cdot \frac{p^{2m}}{1+p^{2m}}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}} - e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right)\right\}.$$

Les trois premières formules sont des formules purement trigonométriques. Si l'on y pose $u = \frac{Kx}{\pi}$, on peut les réduire à la forme:

$$(10)\quad \sum_1^\infty q^{n-1} \sin(nx) = \frac{\sin x}{1-2q\cos x+q^2},$$

$$(11)\quad \sum_1^\infty q^{n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) = \frac{(1+q)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{1-2q\cos x+q^2},$$

$$(12)\quad \sum_1^\infty q^{n-1} \cos\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) = \frac{(1-q)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1-2q\cos x+q^2},$$

où q est une quantité quelconque réelle plus petite que l'unité, ou imaginaire dont le module est plus petit que l'unité, et x une quantité quelconque.

Si l'on multiplie l'équation (11) par $\sin(\frac{x}{2})$, l'équation (12) par $\cos(\frac{x}{2})$, et qu'on en cherche la différence, on trouvera de plus:

(13) $\sum_1^\infty q^{n-1}\cos(nx) = \frac{\cos x - q}{1-2q\cos x+q^2}$, et de là:

(14) $\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2} = 1+2\sum_1^\infty q^n\cos(nx)$.

A l'aide des formules (11), 12) et (14) on peut réduire les formules (4), (5) et (6) à la forme:

(15) $\Delta\,\mathrm{am}\,u = \frac{\pi}{2K}\left\{1+4\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}}\cdot\cos(\frac{n\pi u}{K})\right\}$,

(16) $\cos\mathrm{am}\,u = \frac{2\pi}{kK}\cdot\sum_1^\infty \frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+q^{2n-1}}\cdot\cos(\frac{(2n-1)\pi u}{2K})$,

(17) $\sin\mathrm{am}\,u = \frac{2\pi}{kK}\cdot\sum_1^\infty \frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1-q^{2n-1}}\cdot\sin(\frac{(2n-1)\pi u}{2K})$.

55. Si enfin dans les formules du 52 on pose $u+K+iK'$ au lieu de u, ou, ce qui vaut le même, si dans les formules du paragraphe précédent on pose $u+K$ au lieu de u, on trouvera les formules:

(1) $\frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,u} = \frac{\pi}{2k'K}\left\{1+4\sum_1^\infty(-1)^n\cdot\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos(\frac{n\pi u}{K})\right\}$,

(2) $\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u} = -\frac{2\pi}{kk'K}\cdot\sum_1^\infty(-1)^n\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+q^{2n-1}}\cdot\sin(\frac{(2n-1)\pi u}{2K})$,

(3) $\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u} = -\frac{2\pi}{kK}\cdot\sum_1^\infty(-1)^n\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1-q^{2n-1}}\cdot\cos(\frac{(2n-1)\pi u}{2K})$,

(4) $\frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,u} = -\frac{\pi}{k'K'}\sum_1^\infty(-1)^m\cdot\frac{\sqrt{p^{2m-1}}}{1-p^{2m-1}}\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}+e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right)$,

(5) $\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u} = -\frac{\pi}{kk'K'}\sum_1^\infty(-1)^m\cdot\frac{\sqrt{p^{2m-1}}}{1+p^{2m-1}}\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}-e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right)$,

(6) $\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u} = \frac{\pi}{2kK'}\left\{1+2\sum_1^\infty(-1)^m\cdot\frac{p^m}{1+p^{2m}}\left(e^{\frac{m\pi u}{K'}}+e^{-\frac{m\pi u}{K'}}\right)\right\}$.

56. De même que dans la théorie des fonctions trigonométriques outre les deux fonctions principales $\sin u$ et $\cos u$, on considère encore les quatre fonctions: $\frac{1}{\sin u}, \frac{\cos u}{\sin u}, \frac{1}{\cos u}, \frac{\sin u}{\cos u}$, de même dans la théorie des fonctions elliptiques outre les trois fonctions principales: $\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u$ et $\Delta\,\mathrm{am}\,u$, on considère les quinze fonctions:

$$\frac{1}{\sin\mathrm{am}\,u}, \quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}, \quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u},$$

$$\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,u},\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u},\quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u},$$

$$\frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,u},\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u},\quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u},$$

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u},\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u},\quad \frac{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u},$$

$$\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u},\quad \frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u},\quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\cos\mathrm{am}\,u}.$$

Dans les paragraphes précédents nous avons donné les développements de ces dix-huit fonctions en séries infinies de deux manières différentes en fonctions de p, et de même en fonctions de q, donc en tout soixante-douze formules différentes. De plus nous avons trouvé des développements des trois fonctions principales, $\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u$, $\Delta\,\mathrm{am}\,u$, en produits d'une nombre infini de facteurs en fonctions de p et en fonctions de q, donc six formules différentes. En tout les paragraphes précédents contiennent donc soixante-dix-huit formules différentes.

57. Des formules précédentes on peut déduire le développement en série infinie de l'amplitude de u en remarquant que: $\mathrm{am}\,u = \int_0^u \Delta\,\mathrm{am}\,u\,.\,du$.

Si l'on substitue ici la valeur de $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ donnée par la formule (8) du **39**, on trouvera:

$$(1)\quad \mathrm{am}\,u = \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arctang}\,e^{-\frac{\pi u}{2K'}} + 2\sum_1^\infty{}_n\,\mathrm{arctang}\left(\frac{p^n}{1+p^{2n}}\left(e^{\frac{\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{\pi u}{2K'}}\right)\right).$$

En substituant la valeur de $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ donnée par la formule (6) du **40** on trouvera:

$$(2)\quad \mathrm{am}\,u = u + 2\sum_1^\infty{}_m\,(-1)^m\left\{\frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\cdot\frac{\pi u}{2K} - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m-1}}\cdot\tan\left(\frac{\pi u}{2K}\right)\right)\right\}.$$

En substituant la valeur de $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ donnée par la formule (7) du **54** on trouvera:

$$(3)\quad \mathrm{am}\,u = \frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{arc\,tang}\,e^{-\frac{\pi u}{2K'}} - \\ - 2\sum_1^\infty{}_m\,\frac{(-1)^m}{2m-1}\cdot\frac{p^{2m-1}}{1-p^{2m-1}}\left(e^{\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{(2m-1)\pi u}{2K'}}\right).$$

Enfin en substituant la valeur de $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ donnée par la formule (15) du **54** on trouvera:

$$(4)\quad \mathrm{am}\,u = \frac{\pi u}{2K} + 2\sum_1^\infty{}_n\,\frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cdot\sin\left(\frac{n\pi u}{K}\right).$$

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

Ole Jacob
Dr. O. J. BROCH,

Professeur de Mathématiques à l'Université Royale de Christiania, membre des Académies des sciences à Trondhjem, Christiania, Stockholm et Copenhague, membre de la société physiographique de Lund, et de l'institution géologique impériale et royale à Vienne.

CHRISTIANIA.

LIBRAIRIE DE P. T. MALLING.

BRØGGER & CHRISTIE IMPRIMEURS.

1867.

Math 3708.66

1871, Sept. 20.
Haven Fund.

Table des matières.

§ Pages

Chapitre premier. *Définition et théorème fondamental d'Abel sur l'addition des intégrales elliptiques* 1

Définitions 1. 1

Différentielles des fonctions elliptiques 2. 2

Théorème d'Abel sur l'addition de deux intégrales elliptiques 3. 2

Fonctions elliptiques de la somme et de la différence de deux arguments §§ 4—7. 4

Autres manières de trouver la somme de deux intégrales elliptiques 8. 8

Théorème général d'Abel sur l'addition d'un nombre quelconque d'intégrales elliptiques 9. 8

85 formules entre les fonctions elliptiques de deux arguments et lès fonctions elliptiques de la somme et de la différence de ces arguments 10. 14

(Les formules (8)—(23) du § 111, pag. 273 auraient dû avoir eu leur place ici).

Formules des fonctions elliptiques du double et de la moitié de l'argument . . 11. 22

Formules analogues à celles de la trigonométrie sphérique 12. 23

Construction de Lagrange 13. 25

Intégrales générales et intégrales particulières des équations différentielles:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}.\sqrt{1-k^2\xi^2}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\xi^2}.\sqrt{1+k^2\xi^2}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-k'^2\xi^2}.\sqrt{\xi^2-1}}.$$ 14. 26

Chapitre second. *Intégrales elliptiques complètes.* 28

Valeur des intégrales complètes pour des valeurs réelles et positives du carré du module plus petites que l'unité, pour des valeurs plus grandes que l'unité, pour des valeurs négatives et pour des valeurs imaginaires 15 28

Valeurs de l'intégrale elliptique entre les limites o et $\frac{1}{k}$ 16 32

Le rapport des deux intégrales complètes K et K', ou, si l'une ou toutes les deux de ces intégrales sont imaginaires, la partie réelle de leur rapport, est toujours positive 17 35

Chapitre troisième. *Fonctions elliptiques d'arguments négatifs et imaginaires* 37

Fonctions d'arguments négatifs 18. 37

Fonctions de l'argument iu 19. 38
Fonctions de l'argument imaginaire u + iv 20. 39
Fonctions elliptiques de l'argument $K \pm iK'$ 21. 39

Chapitre quatrième. *Périodicité des fonctions elliptiques* 40

Fonctions elliptiques des arguments: $u \pm K$, $u \pm (K + iK')$, $u \pm iK'$, $u + 2nK + 2miK'$. Double périodicité des fonctions elliptiques 22. 40
Déduction de la double périodicité des fonctions elliptiques directement de leurs définitions 23. 41
Différentes valeurs de l'argument, dont les fonctions elliptiques ont la même valeur numérique 24. 45
Valeurs des arguments pour lesquelles les fonctions elliptiques disparaissent ou deviennent infinies 25. 46

Chapitre cinquième. *Fonctions elliptiques des multiples de l'argument* . 47

Fonctions elliptiques de $(2p + 1)u$ et de $2pu$ 26. 47
Propriétés générales des numérateurs et des dénominateurs des fonctions elliptiques d'un multiple de l'argument 27. 52
Relations entre les coefficients des numérateurs et ceux des dénominateurs . . 28. 53
Racines des équations, qu'on peut déduire des formules précédentes 29. 58
Fonctions elliptiques des multiples de l'argument, développées en prod. et en sommes 30. 62
Transformation des formules précédentes dans le cas d'une multiple impaire de l'argument. Développement en produits 31. 63
Développement en sommes 32. 72

Chapitre sixième. *Fonctions elliptiques des parties aliquotes de l'argument.* 77

Fonctions elliptiques de $\frac{u}{2}, \frac{K}{2}, \frac{iK'}{2}, \frac{K \pm iK'}{2}$ 33 77

Fonctions elliptiques de $\frac{u}{2p+1}$ 34. 79

Fonctions elliptiques de $\frac{2K}{2p+1}, \frac{2iK'}{2p+1}, \frac{2nK \pm 2miK'}{2p+1}$ 35. 82

Chapitre septième. *Développement des fonctions elliptiques en séries infinies* 86

Théorèmes sur la convergence et sur la divergence des séries infinies simples et doubles, et des produits simples et doubles d'un nombre infini de facteurs 36. 86
Développement des fonctions elliptiques en séries infinies doubles 37. 89
Formules pour la réduction des séries précédentes doubles à des séries simples. 38. 105
Développement de $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ en séries de fonctions exponentielles 39. 106
Développements de $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ en séries de fonctions trigonométriques 40. 108
Développements en séries exponentielles et trigonométriques des fonctions: $\frac{\cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}, \frac{\sin \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}$ et $\frac{1}{\Delta \operatorname{am} u}$ 41. 109

De même des fonctions: $\frac{1}{\sin \operatorname{am} u}, \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u}, \frac{\cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u}$ 42. 110

De même des fonctions: $\frac{\Delta \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u}, \frac{1}{\cos \operatorname{am} u}, \frac{\sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u}$ 43. 111

De même des fonctions: $\frac{\sin \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}, \frac{\cos \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}, \frac{\Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u}$,
$\frac{\cos \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{\sin \operatorname{am} u}, \frac{\sin \operatorname{am} u \,.\, \Delta \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u}, \frac{\sin \operatorname{am} u \,.\, \cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u}$ 44. 112

Développement de sin am u, cos am u et Δ am u en séries de produits doubles d'un nombre infini de facteurs 45. 114

Réductions des produits précédents à des produits simples de fonctions trigonométriques 46. 125

Réductions à des produits simples de fonctions exponentielles 47. 127

Réductions des produits précédents à l'aide des modules 48 129

Logarithmes des fonctions elliptiques développées en séries infinies . §§ 49 et 50. 131

En différentiant les logarithmes des fonctions exponentielles on trouve les fonctions elliptiques développées en séries nouvelles . . . . . § 51—56. 136

Développement de l'amplitude en séries infinies 57. 142

Chapitre huitième. *Fonctions de Jacobi* 143

Propriétés des produits d'un nombre infini de facteurs $\Theta(u)$, $\Theta_1(u)$, $\Theta_2(u)$, $\Theta_3(u)$, $Z(u)$, $Z_1(u)$, $Z_2(u)$, $Z_3(u)$, qui forment les numérateurs et le dénominateur commun des fonctions elliptiques: sin am u, cos am u, Δ am u. Leurs développements en séries infinies 58 143

Détermination du coefficient commun de ces séries 59. 146

Périodicité des Θfonctions et des Zfonctions 60. 148

Relations entre les Θfonctions et les Z fonctions 61. 149

Fonctions de Jacobi: $\theta(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, $\theta_3(x)$. Leurs développement en produits d'un nombre infini de facteurs et en séries. Le nome et le nome complémentaire des θ fonctions 62. 153

Transformations des θ fonctions pour des accroissements de la variable par $\frac{\pi}{2}$ et par $\frac{i}{2}$. log q, quand la variable change le signe, et quand elle est la racine carrée d'une quantité négative 63. 155

Les fonctions elliptiques exprimées par les θ fonctions. Relations qui en résultent entre les quatre θ fonctions 64. 156

Valeurs des modules et des intégrales complètes exprimées par les θfonctions de zéro 65. 157

Théorème d'Abel sur l'addition des fonctions elliptiques exprimée par les θfonctions 66. 159

Rélations entre les θfonctions d'une somme et d'une différence de deux arguments; θ fonctions de 2x exprimées par les θ fonctions de x 67. 163

Relations entre les θ fonctions de quatre variables indépendantes 68. 167

Les carrées des fonctions elliptiques exprimées par les dérivées des logarithmes des θfonctions 69. 169

Développements en séries infinies trigonométriques des carrées des fonctions elliptiques 70. 171

Développements des mêmes fonctions en séries infinies exponentielles 71. 174

Équation différentielle partielle à laquelle satisfont toutes les θ fonctions . . . 72. 177

Développements en séries des fonctions: $\frac{1}{\theta x}, \frac{1}{\theta_1 x}, \frac{1}{\theta_2 x}, \frac{1}{\theta_3 x}$ 73. 179

Chapitre neuvième. *Transformations des fonctions de Jacobi par rapport au nome* 182

Relations entre les θfonctions au nome q et celles au nome q^2, entre les θfonctions au nome q et celles au nome $\sqrt{q}$ 74. 182

Transformations des θfonctions au nome q en θ fonctions au nome q^2, et en θfonctions au nome $\sqrt{q}$ 75. 185

Transformations des θfonctions au nome q^4 en θfonctions au nome q . . . 76. 186
Les mêmes transformations avec l'argument zéro 77. 187
Transformations des modules et des intégrales complètes quand on change le nome q en q^2, en $\sqrt{q}$ et en q^4 , ... 78. 187
Transformations correspondantes des fonctions elliptiques 79. 188
Transformation de Landen; transformation de l'intégrale elliptique quand on élève le nome au carré 80. 190
Autre transformation 81. 191
Transformation de l'intégrale elliptique quand on élève le nome au quatrième puissance 82. 192
Transformation des θfonctions, des modules, des intégrales complètes, et des fonctions elliptiques quand on change le signe du nome. Le module complémentaire k' est alors changé en $\frac{1}{k'}$ 83. 194
Transformation des θfonctions, des modules, des intégrales complètes et des fonctions elliptiques quand on change le signe du nome complémentaire. Le module k est alors changé en $\frac{1}{k}$ 84. 196
Déduction des transformations des deux derniers paragraphes directement de la définition des fonctions elliptiques 85. 198
Chapitre dixième. *Développements des modules et des intégrales complètes en séries infinies* . . , ... 200
129 formules qu'on déduit des formules du septième et du huitième chapitre . 86. 200
Réduction des 129 formules précédentes à 36 formules indépendantes; on trouve de là 33 formules en q 87 207
Valeurs des racines carrées des intégrales complètes en séries infinies et des racines carrées des modules en quotients de séries infinies, ordonnées suivant les puissances ascendantes du nome 88. 210
Valeurs des racines carrées des intégrales complètes en produits d'un nombre infini de facteurs et des racines quatrièmes des modules en quotients de produits d'un nombre infini de facteurs 89. 211
Valeurs de la racine quatrième du nome en séries infinies suivant les puissances ascendantes des modules 90. 211
Développement des logarithmes des modules et des intégrales complètes en séries infinies qui dépendent du nome. Développement de la logarithme du nome en série infinie suivant les puissances du module. Développement de l'intégrale complète K' en série infinie suivant les puissances du module k . . 91. 212
Formules nouvelles en q . . . . . §§ 92 et 93. 214
Théorème de Fermat: un nombre entier quelconque peut être mis sous la forme d'une somme de quatre carrées 94. 216
Addition au chapitre dixième. Développement de la racine quatrième du module et du module complémentaire en quotients de séries infinies suivant les puissances du nome (Addition à la fin de l'ouvrage) 279
Chapitre onzième. *Calcul numérique des fonctions elliptiques* 218
Calcul des nomes q et p, et des intégrales complètes, quand le module k est réel et plus petit que l'unité. Table des nomes et des intégrales complètes

pour tous les dégrés de l'angle du module dépuis 0^0 jusqu' à 45^0 . . . 96. 219
Si le module est réel, mais plus grand que l'unité 97. 230
Si le carré du module est une quantité négative 98. 231
Si le carré du module est une quantité imaginaire 99. 231
Calcul des θ fonctions et des fonctions elliptiques quand le module est réel et plus petit que l'unité 100. 234
Calcul des fonctions elliptiques à l'aide de la transformation de Landen . . 101. 238
Si le module est plus grand que l'unité 102. 239
Si le carré du module est une quantité réelle mais négative 103. 242
Si le carré du module ou si l'argument est une quantité imaginaire . . . 104. 244
Autre méthode si l'argument seulement est une quantité imaginaire 105. 252
Calcul de l'intégrale elliptique; formules générales. Calcul si le module est une quantité réelle et plus petit que l'unité 106. 257
Autre méthode à l'aide de la transformation de Landen 107. 262
Si le module est réel, mais plus grand que l'unité 108. 263
Si le carré du module est une quantité négative 109. 263
Si le carré du module, ou si l'amplitude est une quantité imaginaire . . . 110. 264
Autre méthode pour le calcul de l'intégrale elliptique si les fonctions elliptiques sont des quantités imaginaires . . . . . §§ 111 et 112. 271
Les autres valeurs de l'intégrale elliptique 113. 278

Errata.

Page 1, ligne 13; *au lieu de* et de φ, *lisez* ou de φ.

— 13. ligne 32; *au lieu de* $(f(\frac{1}{k}))^2$, *lisez* $k^{2n}(f(\frac{1}{k}))^2$.

ligne dernière; *au lieu de* $f(\frac{1}{k})$, *lisez* $k^n f(\frac{1}{k})$.

— 15, ligne 6; *au lieu de* sim β, *lisez* sin am β.

— 22, formule (68); *ajoutez* le signe négatif.

— 86, ligne 11; *au lieu de* $u = 1$, *lisez* $n = 1$.

— 102, formule (2); *au lieu de* $1 - e^{-\frac{\pi u}{2K'}}$, *lisez* $1 - e^{-\frac{\pi u}{K'}}$,

et au lieu de e^{2n} *lisez* p^{2n}.

— 103, ligne 23; *au lieu de* $f(o) + \sum_1^\infty{}_n(f(n) + \varphi(n))$,

lisez $f(o) + \sum_1^\infty{}_n(2f(n) + \varphi(n))$.

— 112, ligne 18; *au lieu de* cos am u . Δ am u, *lisez* sin am u . Δ am u.

— 138, formule (1); *au lieu de* sin am n, *lisez* sin am u,

et au lieu de $\sin(\frac{n\pi u}{K})$, *lisez* $\sin(\frac{n\pi u}{2K})$.

— 174, seconde formule (2); *au lieu de* + li, *lisez* li +.

— 176, formule de (12); *au lieu de* $\sum_1^\infty{}_n(-1)^n$, *lisez* $\sum_1^\infty{}_n$.

— 181, formule (5), dans le dénominateur; *au lieu de* $+ q^{(2m-1)}$,

lisez $+ q^{2(2m-1)}$.

— 254, ligne 33; *au lieu de* $\tang^2 \frac{1}{2}\alpha'_2 . \sin \varphi_4$, *lisez* $\tang^2 \frac{1}{2}\alpha'_2 . \sin \varphi'_4$.

— 259, ligne 12; *au lieu de* (11), *lisez* (12).

— 270, ligne dernière; *au lieu de* $0{,}8728_n$ *lisez* $0{,}7728_n$.

Chapitre huitième.

Fonctions de Jacobi.

58. L'illustre Jacobi a le premier attiré l'attention des géomètres sur les produits d'un nombre infini de facteurs, qui dans les équations du 48 forment les numérateurs et le dénominateur commun des trois fonctions elliptiques : $\sin \mathrm{am}\, u$, $\cos \mathrm{am}\, u$, $\Delta \mathrm{am}\, u$.

Nous commencerons par le développement de ces produits en séries infinies.

Considérons donc le dénominateur commun des trois premières équations, que nous désignerons en fonction de u et k par $\Theta(u,k)$, ou, tant qu'il ne s'agit pas d'autre module que k, simplement par $\Theta(u)$:

$$\Theta(u) = \prod_1^\infty{}_m \left(1 - 2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) + q^{2(2m-1)}\right) =$$

$$= \prod_1^\infty{}_m \left(1 - q^{2m-1}.e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1 - q^{2m-1}.e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right).$$

Ce produit est toujours convergent, puisque q ou, si q est imaginaire, son module est toujours plus petit que l'unité ; donc on peut le développer en série de la forme :

$$\Theta(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_m . e^{\frac{im\pi u}{K}},$$

où A_m est une fonction de q et de l'indice m.

Pour la déterminer posons $u = v + 2iK'$, donc :

$e^{\frac{i\pi u}{K}} = e^{-\frac{2\pi K'}{K}}.e^{\frac{i\pi v}{K}} = q^2.e^{\frac{i\pi v}{K}}$, puisque : $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$. On trouve alors :

$$\Theta(u) = \prod_1^\infty{}_m \left(1 - q^{2m+1}.e^{\frac{i\pi v}{K}}\right)\left(1 - q^{2m-3}.e^{-\frac{i\pi v}{K}}\right).$$

Maintenant on a :

$$\prod_1^\infty{}_m \left(1 - q^{2m+1}.e^{\frac{i\pi v}{K}}\right) = \frac{1}{1 - q.e^{\frac{i\pi v}{K}}} . \prod_1^\infty{}_m \left(1 - q^{2m-1}.e^{\frac{i\pi v}{K}}\right),$$

$$\prod_1^\infty{}_m \left(1 - q^{2m-3}.e^{-\frac{i\pi v}{K}}\right) = \left(1 - q^{-1}.e^{-\frac{i\pi v}{K}}\right) . \prod_1^\infty{}_m \left(1 - q^{2m-1}.e^{\frac{i\pi v}{K}}\right) =$$

$$= -q^{-1}.e^{-\frac{i\pi v}{K}}\left(1 - q.e^{\frac{i\pi v}{K}}\right) . \prod_1^\infty{}_m \left(1 - q^{2m-1}.e^{-\frac{i\pi v}{K}}\right),$$

où chacun de ces produits d'un nombre infini de facteurs est convergent; donc:

$$\Theta(u) = -q^{-1}.e^{-\frac{i\pi v}{K}}.\prod_1^\infty{}_m\left(1-q^{2m-1}.e^{\frac{i\pi v}{K}}\right)\left(1-q^{2m-1}.e^{-\frac{i\pi v}{K}}\right) = -q^{-1}.e^{-\frac{i\pi v}{K}}.\Theta(v).$$

$$\text{Mais: } \Theta(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_m.e^{\frac{im\pi u}{K}} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_m.q^{2m}.e^{\frac{im\pi v}{K}},$$

$$\Theta(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_m.e^{\frac{im\pi v}{K}};$$

donc on a:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_m.q^{2m}.e^{\frac{im\pi v}{K}} = -q^{-1}.e^{-\frac{i\pi v}{K}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_m.e^{\frac{im\pi v}{K}} = -q^{-1}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_m.e^{\frac{i(m-1)\pi v}{K}} =$$

$$= -\frac{1}{q}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_{m+1}.e^{\frac{im\pi v}{K}}.$$

De là on tire: $A_m.q^{2m} = -\frac{1}{q}.A_{m+1}$, $A_{m+1} = -q^{2m+1}.A_m$.

Si l'on pose ici successivement $m = o, +1, +2, +3, \ldots -1, -2, -3, \ldots$ on trouvera:

$A_1 = -qA_0, A_2 = -q^3A_1 = q^4A_0, A_3 = -q^5A_2 = -q^9A_0, \ldots$.

$A_{-1} = -qA_0, A_{-2} = -q^3A_{-1} = q^4A_0, A_{-3} = -q^5A_{-2} = -q^9A_0, \ldots$.

Donc enfin on a en général: $A_m = (-1)^m.q^{m^2}.A_0$, où A_0 est une fonction de q. Si l'on désigne cette fonction par f(q), on aura donc:

(1) $$\Theta(u) = \prod_1^\infty{}_m(1-2q^{2m-1}.\cos(\frac{\pi u}{K}) + q^{2(2m-1)}) =$$

$$= f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.q^{m^2}.e^{\frac{im\pi u}{K}} = \tfrac{1}{2}f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.q^{m^2}.\left(e^{\frac{im\pi u}{K}}+e^{-\frac{im\pi u}{K}}\right) -$$

$$= f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.q^{m^2}.\cos\left(\frac{m\pi u}{K}\right).$$

Si l'on pose $u + iK'$ au lieu de u, on aura:

$$\Theta(u+iK') = \prod_1^\infty{}_m\left(1-q^{2m-1}.e^{-\frac{\pi K'}{K}}.e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1-q^{2m-1}.e^{\frac{\pi K'}{K}}.e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right) =$$

$$= \prod_1^\infty{}_m\left(1-q^{2m}.e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1-q^{2m-2}.e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right) =$$

$$= \left(1-e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right).\prod_1^\infty{}_m\left(1-q^{2m}.e^{\frac{i\pi u}{K}}\right)\left(1-q^{2m}.e^{-\frac{i\pi u}{K}}\right) =$$

$$= 2ie^{-\frac{i\pi u}{2K}}.\sin(\frac{\pi u}{2K}).\prod_1^\infty{}_m(1-2q^{2m}.\cos(\frac{\pi u}{K}) + q^{4m}),$$

et de plus:

$$\Theta(u+iK') = f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m.\, q^{m^2} e^{-\frac{m\pi K'}{K}}.\, e^{\frac{im\pi u}{K}} = f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{m^2+m}.e^{\frac{im\pi u}{K}} =$$

$$= \frac{f(q)}{\sqrt[4]{q}}.e^{-\frac{i\pi u}{2K}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m\, q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}.\, e^{\frac{i(2m+1)\pi u}{2K}} =$$

$$= \frac{f(q)}{\sqrt[4]{q}}.e^{-\frac{i\pi u}{2K}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m\, q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.\, e^{-\frac{i(2m-1)\pi u}{2K}} =$$

$$= -\frac{f(q)}{\sqrt[4]{q}}.e^{-\frac{i\pi u}{2K}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m\, q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.\, e^{\frac{i(2m-1)\pi u}{2K}} =$$

$$= -\tfrac{1}{2}.\frac{f(q)}{\sqrt[4]{q}}.e^{-\frac{i\pi u}{2K}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}\left(e^{\frac{i(2m-1)\pi u}{2K}} - e^{-\frac{i(2m-1)\pi u}{2K}}\right) =$$

$$= -i.\frac{f(q)}{\sqrt[4]{q}}.e^{-\frac{i\pi u}{2K}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.\sin\left(\frac{(2m-1)\pi u}{2K}\right).$$

Donc en désignant par $\Theta_1(u)$ la fonction:

$$\Theta_1(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\prod_1^{\infty}\left(1-2q^{2m}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}\right),$$

on aura:

$$(2)\quad \Theta_1(u) = -i\sqrt[4]{q}.e^{\frac{i\pi u}{2K}}.\Theta(u+iK') = if(q).\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.e^{\frac{i(2m-1)\pi u}{2K}} =$$

$$= -f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m.q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.\sin\left(\frac{(2m-1)\pi u}{2K}\right).$$

Si dans les équations (2) et (1) on pose $u+K$ au lieu de u, on aura les fonctions:

$$(3)\quad \Theta_2(u) = \Theta_1(u+K) = 2\sqrt[4]{q}.\cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right).\prod_1^{\infty}\left(1+2q^{2m}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{4m}\right) =$$

$$= f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} e^{\frac{i(2m-1)\pi u}{2K}} = f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.\cos\left(\frac{(2m-1)\pi u}{2K}\right);$$

$$(4)\quad \Theta_3(u) = \Theta(u+K) = \prod_1^{\infty}\left(1+2q^{2m-1}.\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)+q^{2(2m-1)}\right) =$$

$$= f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}.e^{\frac{im\pi u}{K}} = f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}.\cos\left(\frac{m\pi u}{K}\right).$$

Si dans les formules précédentes on change k en k', donc K en K', K' en K, q en p, et de plus u en iu, on trouvera les quatre produits qui forment les numérateurs et le dénominateur des trois dernières formules du 48:

$$(5)\quad Z(u,k)=\Theta_2(iu,k')=\sqrt[4]{p}\cdot\frac{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}\cdot\prod_1^\infty\left(1+p^{2n}\cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)\left(1+p^{2n}\cdot e^{\frac{\pi u}{K'}}\right)=$$

$$=f(p)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cdot e^{-\frac{(2n-1)\pi u}{2K'}}=f(p)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cdot e^{\frac{(2n-1)\pi u}{2K'}};$$

$$(6)\quad Z_1(u,k)=\Theta_1(iu,k')=i\sqrt[4]{p}\cdot\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{e^{-\frac{\pi u}{2K'}}}\cdot\prod_1^\infty\left(1-p^{2n}\cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)\left(1-p^{2n}\cdot e^{\frac{\pi u}{K'}}\right)=$$

$$=if(p)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cdot e^{-\frac{(2n-1)\pi u}{2K'}}=-if(p)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\cdot e^{\frac{(2n-1)\pi u}{2K'}};$$

$$(7)\quad Z_2(u,k)=\Theta(iu,k')=\prod_1^\infty(1-p^{2n-1}\cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}})(1-p^{2n-1}\cdot e^{\frac{\pi u}{K'}})=$$

$$=f(p)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n\cdot p^{n^2}\cdot e^{-\frac{n\pi u}{K'}}=f(p)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n p^{n^2}\cdot e^{\frac{n\pi u}{K'}};$$

$$(8)\quad Z_3(u,k)=\Theta_3(iu,k')=\prod_1^\infty(1+p^{2n-1}\cdot e^{-\frac{\pi u}{K'}})(1+p^{2n-1}\cdot e^{\frac{\pi u}{K'}})=$$

$$=f(p)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, p^{n^2}\cdot e^{-\frac{n\pi u}{K'}}=f(p)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}p^{n^2}\cdot e^{\frac{n\pi u}{K'}}.$$

On tire de ces équations les formules suivantes pour les Θfonctions et Zfonctions de l'argument imaginaire iu:

$$(9)\quad\begin{cases}\Theta\ (iu,k)=Z_2(u,k'),\ \Theta_1(iu,k)=Z_1(u,k'),\\ \Theta_2(iu,k)=Z\ (u,k'),\ \Theta_3(iu,k)=Z_3(u,k'),\end{cases}$$

$$(10)\quad\begin{cases}Z\ (iu,k)=\Theta_2(u,k'),\ Z_1(iu,k)=-\Theta_1(u,k'),\\ Z_2(iu,k)=\Theta\ (u,k'),\ Z_3(iu,k)=\Theta_3(u,k').\end{cases}$$

59. La fonction f(q) sera déterminée en donnant à u une valeur particulière. Si dans l'équation (1) du paragraphe précédent on pose u = o, on aura:

$$\prod_1^\infty(1-q^{2m-1})^2=f(q)\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m q^{m^2},$$

et de là:

$$(1)\quad f(q)=\frac{\prod_1^\infty(1-q^{2m-1})^2}{\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^m\cdot q^{m^2}}.$$

De même, si dans la même équation on pose $u=\frac{K}{2}$, on aura, puisque

$\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ pour toute valeur impaire de m, et $\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{m}{2}}$ pour toute valeur paire de m:

$$\prod_1^\infty{}_m (1 + q^{2(2m-1)}) = f(q) \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m q^{4m^2},$$

et de là:

$$(2) \qquad f(q) = \frac{\prod_1^\infty{}_m (1 + q^{2(2m-1)})}{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m q^{4m^2}}.$$

En comparant ces deux valeurs de f(q), on voit que le dénominateur de la première se change dans celui de la seconde, si l'on pose q^4 au lieu de q. Donc on tire de l'équation (1):

$$f(q^4) = \frac{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{4(2m-1)})^2}{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m q^{4m^2}},$$

et en divisant cette équation dans l'équation (2) on aura:

$$\frac{f(q)}{f(q^4)} = \frac{\prod_1^\infty{}_m (1+q^{2(2m-1)})}{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{4(2m-1)})^2}.$$

Mais $(1-q^{4(2m-1)})^2 = (1+q^{2(2m-1)})(1-q^{2(2m-1)})(1-q^{4(2m-1)})$, donc:

$$\frac{f(q)}{f(q^4)} = \frac{1}{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{2(2m-1)})(1-q^{4(2m-1)})} = \frac{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{8m})}{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{2(2m-1)})(1-q^{4(2m-1)})(1-q^{4.2m})}.$$

Or on a:

$$\prod_1^\infty{}_m (1-q^{4(2m-1)})(1-q^{4.2m}) = \prod_1^\infty{}_m (1-q^{4m}) = \prod_1^\infty{}_m (1-q^{2.2m})$$

et $\prod_1^\infty{}_m (1-q^{2(2m-1)})(1-q^{2.2m}) = \prod_1^\infty{}_m (1-q^{2m})$.

Donc:

$$\frac{f(q)}{f(q^4)} = \frac{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{8m})}{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{2m})}.$$

Si l'on pose ici plusieurs fois de suite q^4 au lieu de q, on trouvera:

$$\frac{f(q^4)}{f(q^{16})} = \frac{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{32m})}{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{8m})}, \quad \frac{f(q^{16})}{f(p^{64})} = \frac{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{128m})}{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{32m})}, \ldots.$$

et en multipliant un nombre n de ces fractions on trouvera:

$$\frac{f(q)}{f(q^{(4^n)})} = \frac{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{4^n 2m})}{\prod_1^\infty{}_m (1-q^{2m})}.$$

Si l'on fait ici croître n indéfiniment, la limite de $q^{(4^n)}$ deviendra zéro,

puisque q ou, si elle est imaginaire, son module est toujours plus petit que l'unité. De plus si dans l'équation (1) on pose $q = 0$, on trouvera $f(0) = 1$. Donc on aura:

$$(3) \qquad f(q) = \frac{1}{\prod_1^\infty (1-q^{2m})}, \quad f(p) = \frac{1}{\prod_1^\infty (1-p^{2n})}.$$

60. Des formules (1), (2), (3) et (4) du **58** on tire:

$$(1) \quad \begin{cases} \Theta(u+K) = \Theta_3(u), \ \Theta(u+2nK) = \Theta(u), \\ \Theta_1(u+K) = \Theta_2(u), \ \Theta_1(u+2nK) = (-1)^n \Theta_1(u), \\ \Theta_2(u+K) = -\Theta_1(u), \ \Theta_2(u+2nK) = (-1)^n \Theta_2(u), \\ \Theta_3(u+K) = \Theta(u), \ \Theta_3(u+2nK) = \Theta_3(u), \end{cases}$$

et en remarquant que:

$$\sqrt[4]{q} \cdot e^{\frac{i\pi u}{2K}} = e^{\frac{\pi(2iu-K')}{4K}} = \frac{e^{\frac{\pi(u+iK')^2}{4KK'}}}{e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}}}$$

on trouvera de plus:

$$(2) \quad \begin{cases} e^{\frac{\pi(u+iK')^2}{4KK'}} \cdot \Theta(u+iK') = i.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta_1(u), \ e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} \Theta(u+2niK') = (-1)^n . e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \Theta(u), \\ e^{\frac{\pi(u+iK')^2}{4KK'}} \cdot \Theta_1(u+iK') = i.e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta(u), \ e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} \cdot \Theta_1(u+2niK') = (-1)^n . e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \Theta_1(u) \\ e^{\frac{\pi(u+iK')^2}{4KK'}} \cdot \Theta_2(u+iK') = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta_3(u), \ e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} \cdot \Theta_2(u+2niK') = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta_2(u) \\ e^{\frac{\pi(u+iK')^2}{4KK'}} \cdot \Theta_3(u+iK') = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta_2(u), \ e^{\frac{\pi(u+2niK')^2}{4KK'}} \cdot \Theta_3(u+2niK') = e^{\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta_3(u) \end{cases}$$

De même on tire des formules (5), (6), (7) et (8) du 58:

$$Z(u+K,k) = \Theta_2(iu+iK,k'),$$
$$Z_1(u+K,k) = \Theta_1(iu+iK,k'),$$
$$Z_2(u+K,k) = \Theta(iu+iK,k'),$$
$$Z_3(u+K,k) = \Theta_3(iu+iK,k').$$

Mais si dans les formules (2) on substitue iu au lieu de u, et k' au lieu de k, donc K au lieu de K', K' au lieu de K, on trouvera:

$$e^{-\frac{\pi(u+K)^2}{4KK'}} \cdot \Theta_2(iu+iK,k') = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta_3(iu,k') = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot Z_3(u,k),$$

$$e^{-\frac{\pi(u+K)^2}{4KK'}} \cdot \Theta_1(iu+iK,k') = i.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta(iu,k') = i.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot Z_2(u,k),$$

$$e^{-\frac{\pi(u+K)^2}{4KK'}} \cdot \Theta(iu+iK,k') = i.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta_1(iu,k') = i.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot Z_1(u,k),$$

$$e^{-\frac{\pi(u+K)^2}{4KK'}} \cdot \Theta_3(iu+iK,k') = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot \Theta_2(iu,k') = e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}} \cdot Z(u,k).$$

Donc on aura:

$$\left\{\begin{array}{ll} e^{-\frac{\pi(u+K)^2}{4KK'}}.Z(u+K)=e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z_3(u), & e^{-\frac{\pi(u+2nK)^2}{4KK'}}.Z(u+2nK)=e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z(u), \\ e^{-\frac{\pi(u+K)^2}{4KK'}}.Z_1(u+K)=i.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z_2(u), & e^{-\frac{\pi(u+2nK)^2}{4KK'}}.Z_1(u+2nK)=(-1)^n.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}Z_1(u), \\ e^{-\frac{\pi(u+K)^2}{4KK'}}.Z_2(u+K)=i.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z_1(u), & e^{-\frac{\pi(u+2nK)^2}{4KK'}}Z_2(u+2nK)=(-1)^n.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z_2(u), \\ e^{-\frac{\pi(u+K)^2}{4KK'}}.Z_3(u+K)=e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z(u), & e^{-\frac{\pi(u+2nK)^2}{4KK'}}.Z_3(u+2nK)=e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z_3(u). \end{array}\right.$$

De la même manière on trouve:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} Z\ (u+iK')=-Z_1(u),\ Z\ (u+2niK')=(-1)^n.Z(u), \\ Z_1(u+iK')=-Z(u),\ Z_1(u+2niK')=(-1)^n.Z_1(u), \\ Z_2(u+iK')=Z_3(u),\ Z_2(u+2niK')=Z_2(u), \\ Z_3(u+iK')=Z_2(u),\ Z_3(u+2niK')=Z_3(u). \end{array}\right.$$

On voit de là que, tandis que les Θfonctions et les Zfonctions sont des fonctions simplement périodiques avec l'indice de période 4K pour les Θfonctions, et 4iK' pour les Zfonctions, les rapports de deux quelconques des Θfonctions, ainsi que les rapports de deux quelconques des Zfonctions, sont des fonctions doublement périodiques avec les indices de période 4K et 4iK'.

61. Il résulte des formules du paragraphe précédent que les fonctions:

$$\Theta(u),\ \Theta_1(u),\ \Theta_2(u),\ \Theta_3(u)$$

subissent les mêmes transformations que les fonctions:

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z(u),\ -i.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z_1(u),\ i.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z_2(u),\ e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z_3(u),$$

quand on donne à l'argument u l'accroissement K on l'accroissement iK'.

Or on peut démontrer l'égalité de ces fonctions à un facteur constant, fonction de k, près.

On remarque ici que les deux groupes de formules du **48** et **54** qui donnent les fonctions elliptiques sin am u, cos am u et Δ am u en fonctions de u, de q et de p, sont tous les deux déduits des séries de produits doubles du **45** en y effectuant les multiplications par rapport à m ou par rapport à n. Mais on ne peut pas retourner à ces séries de produits doubles pour trouver les relations entre les Θfonctions et les Zfonctions. En effet tandis que par exemple la série double du **45**:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\frac{1-\left(\frac{u}{2nK+2miK'}\right)^2}{1-\left(\frac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2},$$

est convergente, les séries:

$$\prod_{1}^{\infty}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left(1-\left(\frac{u}{2nK+2miK'}\right)^2\right), \text{ et } \prod_{1}^{\infty}{}_{m}\prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left(1-\left(\frac{u}{2nK+(2m-1)iK'}\right)^2\right)$$

pris séparément ne le sont pas.

Il faut donc ici employer d'autres moyens pour trouver l'expression des Θfonctions en fonctions de p au lieu de q. Or ce moyen est la transformation générale d'une série dans une autre à l'aide du théorème de Fourier:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m}\int_{a}^{b}\varphi(\alpha)\,.\cos(2m(x-\alpha))\,.\,d\alpha=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\ldots$$

où $x_1, x_2, x_3 \ldots$ sont les valeurs de $x \pm n\pi$ qui tombent entre les limites a et b, avec la restriction que, si l'une de ces valeurs, par exemple x_1, coincide avec une des limites a ou b, on mettra $\frac{1}{2}\varphi(x_1)$ au lieu de $\varphi(x_1)$, et, si la fonction $\varphi(x)$ change de valeurs dans le voisinage de l'une des valeurs $x_1, x_2, x_3 \ldots$, on considéra comme valeur correspondante de la fonction $\varphi(x)$ la moyenne de ses deux valeurs.

Si l'on pose $a = -\infty$, $b = +\infty$, et si de plus la série $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\varphi(x+n\pi)$ est convergente on en tirera:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\varphi(x+n\pi)=\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\,.\cos(2m(x-\alpha))\,.\,d\alpha.$$

Nous rappeleront ici en peu de mots la démonstration de ce théorème. Considérons l'expression:

$$\frac{\frac{1}{2n+1}.\sin((s-t)\pi)}{\sin(\frac{(s-t)\pi}{2n+1})},$$

où s et t sont deux nombres entiers quelconques entre les limites $-n$ et $+n$. Cette expression est égale a zéro, tant que t diffère de s, mais elle est egale à l'unité quand t coincide avec s. Donc on a en général:

$$F\left(\frac{s\pi}{2n+1}\right)=\sum_{-n}^{+n}{}_{t}F\left(\frac{t\pi}{2n+1}\right).\frac{\sin((s-t)\pi)}{\sin\left(\frac{(s-t)\pi}{2n+1}\right)}.\frac{1}{2n+1},$$

ou, si l'on pose: $\frac{s\pi}{2n+1} = x$, $s\pi = (2n+1)x$:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{-n}^{+n}{}_{t}F\left(\frac{t\pi}{2n+1}\right).\frac{\sin\left((2n+1)\left(x-\frac{t\pi}{2n+1}\right)\right)}{\sin\left(x-\frac{t\pi}{2n+1}\right)}.\frac{\pi}{2n+1}.$$

Si l'on fait ici croître n indéfiniment, la somme deviendra une intégrale définie entre les limites: $\lim(\frac{-n\pi}{2n+1}) = -\frac{\pi}{2}$, et $\lim(\frac{+n\pi}{2n+1}) = +\frac{\pi}{2}$, et on aura:

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F(\beta) \cdot \frac{\sin((2n+1)(x-\beta))}{\sin(x-\beta)} \cdot d\beta \right\},$$

x ayant une valeur quelconque entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Mais on a pour une valeur quelconque entière de n:

$$\cos 2nz = \frac{\sin((2n+1)z) - \sin((2n-1)z)}{2 \sin z}$$

$$\text{Donc: } \sum_{-n}^{+n}{}_m \cos 2mz = \frac{\sin((2n+1)z)}{\sin z}, \text{ et:}$$

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\sin((2n+1)z)}{\sin z} \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \cos 2mz.$$

Donc enfin l'équation précédente deviendra:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F(\beta) \cdot \cos(2m(x-\beta)) \cdot d\beta.$$

Si l'on substitue ici $\varphi(x+n\pi)$ au lieu de F(x), on aura:

$$\varphi(x+n\pi) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \varphi(\beta+n\pi) \cos(2m(x-\beta)) d\beta.$$

Si de plus on pose $\beta + n\pi = \alpha$, et suppose n un nombre entier quelconque, on aura:

$$\varphi(x+n\pi) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \int_{(n-\frac{1}{2})\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi} \varphi(\alpha) \cos(2m(x-\alpha)) \cdot d\alpha,$$

et de là, si la somme $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \varphi(x+n\pi)$ forme une série convergente:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \varphi(x+n\pi) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) \cdot \cos(2m(x-\alpha)) \cdot d\alpha,$$

où alors il n'est plus nécessaire d'ajouter la condition que x tombera entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, puisque la valeur de cos (2m (x−α)) ainsi que celle de la série convergente $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \varphi(x+n\pi)$ ne sera pas changée si l'on ajoute à x un nombre quelconque de $+\pi$ ou de $-\pi$.

Si l'on pose dans l'équation précédente:

$$x = \frac{\pi u}{2K}, \quad \alpha = \frac{\pi v}{2K}, \quad \varphi(x) = \varphi(\frac{\pi u}{2K}) = F(u), \text{ on aura:}$$

$$(1) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n F(u+2nK) = \frac{1}{2K} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) \cdot \cos(\frac{m\pi}{K}(u-v)) \cdot dv.$$

Pour la transformation à l'aide de cette formule de la fonction:

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z(u) \quad e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.f(p).\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}.e^{-\frac{(2n-1)\pi u}{2K'}}$$

$$= f(p).e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, e^{-\frac{(2n-1)^2\pi K}{4K'}}.e^{-\frac{(2n-1)\pi u}{2K'}} = f(p).\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, e^{-\frac{\pi}{4KK'}(u+(2n-1)K)^2},$$

on pose donc:

$$F(u+2nK) = e^{-\frac{\pi}{4KK'}(u-K+2nK)^2}, \text{ ou: } F(u) = e^{-\frac{\pi(u-K)^2}{4KK'}}.$$

L'intégrale définie dans la formule (1) deviendra alors:

$$\int_{\infty}^{+\infty} F(v).\cos\left(\frac{m\pi}{K}(u-v)\right).dv = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi(v-K)^2}{4KK'}}.\cos\left(\frac{m\pi}{K}(u-v)\right).dv,$$

ou, si l'on pose $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{KK'}}.(v-K) = z$, et $\sqrt{\frac{\pi K'}{K}} = \beta$:

$$(-1)^m.2\sqrt{\frac{KK'}{\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}.\cos\left(\frac{m\pi u}{K} - 2m\beta z\right).dz =$$

$$= (-1)^m.2\sqrt{\frac{KK'}{\pi}}.\cos\left(\frac{m\pi u}{K}\right).\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}.\cos(2m\beta z)\ dz$$

en remarquant que, puisque $e^{-z^2}.\sin(2m\beta z)$ change le signe avec z: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}.\sin(2m\beta z).dz = 0$. Mais:

$$\int_{\infty}^{+\infty} e^{-z^2}.\cos(2m\beta z).dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}(e^{2mi\beta z} + e^{-2mi\beta z}).dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}.e^{2mi\beta z}.dz = e^{-m^2\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-mi\beta)^2}.dz = e^{-m\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}.dy = e^{-m^2\beta^2}.$$

Donc on a en substituant la valeur $\beta = \sqrt{\frac{\pi K'}{K}}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(v).\cos\left(\frac{m\pi}{K}(u-v)\right).dv = (-1)^m.2\sqrt{KK'}.\cos\left(\frac{m\pi u}{K}\right).e^{-\frac{m^2\pi K'}{K}} =$$

$$= (-1)^m.2\sqrt{KK'}.q^{m^2}.\cos\left(\frac{m\pi u}{K}\right),$$

puisque $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$. En substituant cette valeur dans l'équation (1) on aura enfin:

$$e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.Z(u) = f(p).\sum_{-\infty}^{+\infty} F(u+2nK) = f(p).\sqrt{\frac{K'}{K}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, (-1)^m.q^{m^2}.\cos\left(\frac{m\pi u}{K}\right)$$

ou puisque: $\Theta(u) = f(q).\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, (-1)^m.q^{m^2}.\cos\left(\frac{m\pi u}{K}\right)$:

$$(2)\quad \frac{\Theta(u)}{f(q)} = \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}.\frac{Z(u)}{f(p)}.$$

De la même manière, ou bien en substituant successivement au lieu de u: $u + iK'$, $u + K + iK'$, et $u + K$, on trouvera:

$$(3)\qquad \frac{\Theta_1(u)}{f(q)} = i\sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}\cdot\frac{Z_1(u)}{f(p)},$$

$$(4)\qquad \frac{\Theta_2(u)}{f(q)} = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}\cdot\frac{Z_2(u)}{f(p)},$$

$$(5)\qquad \frac{\Theta_3(u)}{f(q)} = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot e^{-\frac{\pi u^2}{4KK'}}\cdot\frac{Z_3(u)}{f(p)}.$$

62. Jacobi a désigné par θx, $\theta_1 x$, $\theta_2 x$, $\theta_3 x$ les quatres fonctions:

$$(1)\ \theta x = \frac{\Theta(\frac{2Kx}{\pi})}{f(q)},\ \theta_1 x = \frac{\Theta_1(\frac{2Kx}{\pi})}{f(q)},\ \theta_2 x = \frac{\Theta_2(\frac{2Kx}{\pi})}{f(q)},\ \theta_3 x = \frac{\Theta_3(\frac{2Kx}{\pi})}{f(q)}.$$

Si l'on substitue ici les valeurs des quatres Θfonctions du **58**, les valeurs de ces fonctions exprimées par les Zfonctions par les équations du paragraphe précédent, les valeurs des quatres Zfonctions du **58**, et enfin les valeurs de f(q) et f(p) données par les formules (3) du **59**, et qu'on remarque de plus que:

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},\ p = e^{-\frac{\pi K}{K'}},\ \log q\,.\log p = \pi^2,\ \frac{K}{K'} = -\frac{\pi}{\log q} = -\frac{\log p}{\pi},$$

on aura donc:

$$(2)\qquad \theta x = \prod_1^\infty{}_m (1 - 2q^{2m-1}.\cos 2x + q^{2(2m-1)}).(1 - q^{2m}) =$$

$$= \prod_1^\infty{}_m (1 - q^{2m-1}.e^{2ix}).(1 - q^{2m-1}.e^{-2ix}).(1 - q^{2m}) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m.q^{m^2}.e^{2mix} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m.q^{m^2}.\cos 2mx = 1 + 2.\sum_1^\infty{}_m (-1)^m.q^{m^2}.\cos 2mx =$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\sqrt[4]{p}.\frac{1+e^{-\frac{2Kx}{K'}}}{e^{-\frac{Kx}{K'}}}.\prod_1^\infty{}_n (1 + p^{2n}.e^{-\frac{2Kx}{K'}}).(1 + p^{2n}e^{\frac{2Kx}{K'}}).(1 - p^{2n}) =$$

$$= \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.p^{(\frac{x}{\pi})^2}.\sqrt[4]{p}.\frac{1+p^{2x}}{p^{\pi}}.\prod_1^\infty{}_n (1 + p^{2(n+\frac{x}{\pi})}).(1 + p^{2(n-\frac{x}{\pi})}).(1 - p^{2n}) =$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n p^{(\frac{2n-1}{2})^2}e^{\frac{2(2n-1)Kx}{K'}} = \sqrt{\frac{K}{K'}}\,e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\sum_1^\infty{}_n p^{(\frac{2n-1}{2})^2}\left(e^{\frac{(2n-1)Kx}{K'}} + e^{-\frac{(2n-1)Kx}{K'}}\right) =$$

$$= \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n p^{(\frac{(2n-1)}{2}\frac{x}{\pi})^2} = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\sum_1^\infty{}_n \left(p^{(\frac{2n-1}{2}-\frac{x}{\pi})^2} + p^{(\frac{2n-1}{2}+\frac{x}{\pi})^2}\right);$$

$$(3)\quad \theta_1 x = 2\sqrt[4]{q}\,.\sin x.\prod_1^\infty{}_m (1-2q^{2m}.\cos 2x + q^{4m}).(1-q^{2m}) =$$

$$= -i.\sqrt[4]{q}.\frac{1-e^{-2ix}}{e^{-ix}}.\prod_1^\infty{}_m(1-q^{2m}.e^{2ix})(1-q^{2m}.e^{-2ix}).(1-q^{2m}) =$$

$$= i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.e^{(2m-1)ix} = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.\sin(2m-1)x =$$

$$= -2\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.\sin(2m-1)x =$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\sqrt[4]{p}.\frac{1-e^{-\frac{2Kx}{K'}}}{e^{-\frac{Kx}{K'}}}.\prod_1^\infty{}_n(1-p^{2n}.e^{-\frac{2Kx}{K'}}).(1-p^{2n}.e^{\frac{2Kx}{K'}}).(1-p^{2n}) =$$

$$= \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}.\sqrt[4]{p}.\frac{1-p^{\frac{2x}{\pi}}}{p^{\frac{x}{\pi}}}.\prod_1^\infty{}_n(1-p^{2(n+\frac{x}{\pi})}).(1-p^{2(n-\frac{x}{\pi})}).(1-p^{2n}) =$$

$$= -\sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n.p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}.e^{\frac{(2n-1)Kx}{K'}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}\left(e^{\frac{(2n-1)Kx}{K'}}-e^{-\frac{(2n-1)Kx}{K'}}\right) =$$

$$= -\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n.p^{\left(\frac{2n-1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} = -\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\left(p^{\left(\frac{2n-1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2}-p^{\left(\frac{2n-1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2}\right)$$

$$(4)\quad \theta_2 x = 2\sqrt[4]{q}\,.\cos x.\prod_1^\infty{}_m (1+2q^{2m}.\cos 2x + q^{4m}).(1-q^{2m}) =$$

$$= \sqrt[4]{q}.\frac{1+e^{-2ix}}{e^{-ix}}.\prod_1^\infty{}_m(1+q^{2m}.e^{2ix}).(1+q^{2m}.e^{-2ix}).(1-q^{2m}) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.e^{(2m-1)ix} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.\cos(2m-1)x = 2\sum_1^\infty{}_m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}\cos(2m-1)x =$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\prod_1^\infty{}_n(1-p^{2n-1}.e^{-\frac{2Kx}{K'}}).(1-p^{2n-1}.e^{\frac{2Kx}{K'}}).(1-p^{2n}) =$$

$$= \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}.\prod_1^\infty{}_n(1-p^{2(\frac{2n-1}{2}+\frac{x}{\pi})}).(1-p^{2(\frac{2n-1}{2}-\frac{x}{\pi})}).(1-p^{2n}) =$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n.p^{n^2}.e^{\frac{2nKx}{K'}} =$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}\left\{1+\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.p^{n^2}.\left(e^{\frac{2nKx}{K'}}+e^{-\frac{2nKx}{K'}}\right)\right\} = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n.p^{\left(n-\frac{x}{\pi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\left\{p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}+\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\left(p^{\left(n-\frac{x}{\pi}\right)^2}+p^{\left(n+\frac{x}{\pi}\right)^2}\right)\right\};$$

$$(5)\quad \theta_3 x = \prod_1^\infty{}_m (1 + 2q^{2m-1}.\cos 2x + q^{2(2m-1)}).(1-q^{2m}) =$$

$$= \prod_1^\infty{}_m (1 + q^{2m-1}.e^{2ix}).(1 + q^{2m-1}.e^{-2ix}).(1-q^{2m}) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{m^2}.e^{2mix} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{m^2}.\cos 2mx = 1 + 2\sum_1^\infty{}_m q^{m^2}.\cos 2mx =$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\prod_1^\infty{}_n (1+p^{2n-1}.e^{-\frac{2Kx}{K'}}).(1+p^{2n-1}.e^{\frac{2Kx}{K'}}).(1-p^{2n}) =$$

$$= \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.p^{(\frac{x}{\pi})^2}.\prod_1^\infty{}_n \left(1+p^{2(\frac{2n-1}{2}+\frac{x}{\pi})}\right).\left(1+p^{2(\frac{2n-1}{2}-\frac{x}{\pi})}\right).(1-p^{2n}) =$$

$$= \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n p^{n^2}.e^{\frac{2nKx}{K'}} = \sqrt{\frac{K}{K'}}.e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}\left\{1+\sum_1^\infty{}_n p^{n^2}\left(e^{\frac{2nKx}{K'}}+e^{-\frac{2nKx}{K'}}\right)\right\} =$$

$$= \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n p^{(n-\frac{x}{\pi})^2} = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\left\{p^{(\frac{x}{\pi})^2}+\sum_1^\infty{}_n\left(p^{(n-\frac{x}{\pi})^2}+p^{(n+\frac{x}{\pi})^2}\right)\right\}.$$

La quantité q est nommée le *nome* des θfonctions, la quantité p le nome complémentaire. Si l'on considère des θfonctions à différentes nomes on ajoute la valeur du nome sous le signe θ. Ainsi les θfonctions des formules précédentes sont désignées par $\theta(x,q)$, $\theta_1(x,q)$, $\theta_2(x,q)$, $\theta_3(x,q)$.

63. Des formules du **60** on tire:

$$(1)\quad \theta(x+\tfrac{\pi}{2}) = \theta_3 x,\ \theta_1(x+\tfrac{\pi}{2}) = \theta_2 x,\ \theta_2(x+\tfrac{\pi}{2}) = -\theta_1 x,\ \theta_3(x+\tfrac{\pi}{2}) = \theta x;$$

$$(2)\quad \theta(x+n\pi)=\theta x,\ \theta_1(x+n\pi)=(-1)^n\theta_1 x,\ \theta_2(x+n\pi)=(-1)^n\theta_2 x,\ \theta_3(x+n\pi)=\theta_3 x;$$

$$(3)\quad \begin{cases}\theta(x+\frac{i}{2}\log q) = -i.\frac{e^{ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta_1 x,\ \theta_1(x+\frac{i}{2}\log q) = -i.\frac{e^{ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta x,\\ \theta_2(x+\frac{i}{2}\log q) = \frac{e^{ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta_3 x,\ \theta_3(x+\frac{i}{2}\log q) = \frac{e^{ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta_2 x;\end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases}\theta(x+mi\log q) = (-1)^m q^{-m^2}.e^{2mix}.\theta x,\ \theta_1(x+mi\log q) = (-1)^m.q^{-m^2}.e^{2mix}.\theta_1 x,\\ \theta_2(x+mi\log q) = q^{-m^2}.e^{2mix}.\theta_2 x,\ \theta_3(x+mi\log q) = q^{-m^2}.e^{2mix}.\theta_3 x;\end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases}\theta(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q) = -i.\frac{e^{ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta_2 x,\ \theta_1(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q) = -i.\frac{e^{ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta_3 x,\\ \theta_2(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q) = \frac{e^{ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta x,\ \theta_3(x+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q) = -\frac{e^{ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta_1 x;\end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases}\theta(x+n\pi+mi\log q) = (-1)^m.q^{-m^2}.e^{2mix}.\theta x,\\ \theta_1(x+n\pi+mi\log q) = (-1)^{n+m}.q^{-m^2}.e^{2mix}.\theta_1 x,\\ \theta_2(x+n\pi+mi\log q) = (-1)^n.q^{-m^2}.e^{2mix}.\theta_2 x,\\ \theta_3(x+n\pi+mi\log q) = q^{-m^2}.e^{2mix}.\theta_3 x\end{cases}$$

auxquelles formules nous ajouterons les suivantes:

(7) $\theta(-x) = \theta x,\ \theta_1(-x) = -\theta_1 x,\ \theta_2(-x) = \theta_2 x,\ \theta_3(-x) = \theta_3 x.$

Des formules (9) et (10) du **58** jointes aux formules (2), (3), (4) et (5) du **61** on tire:

(8)
$$\begin{cases} \theta(ix,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot e^{\frac{\pi K' x^2}{K}}\cdot \theta_2\left(\frac{Kx}{K'},p\right) = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\cdot p^{-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\cdot \theta_2\left(-\frac{x\log p}{\pi},p\right), \\ \theta_1(ix,q) = i\sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot e^{\frac{\pi K' x^2}{K}}\cdot \theta_1\left(\frac{Kx}{K'},p\right) = i\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\cdot p^{-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\cdot \theta_1\left(-\frac{x\log p}{\pi},p\right), \\ \theta_2(ix,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot e^{\frac{\pi K' x^2}{K}}\cdot \theta\left(\frac{Kx}{K'},p\right) = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\cdot p^{-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\cdot \theta\left(-\frac{x\log p}{\pi},p\right), \\ \theta_3(ix,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\cdot e^{\frac{\pi K' x^2}{K}}\cdot \theta_3\left(\frac{Kx}{K'},p\right) = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\cdot p^{-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\cdot \theta_3\left(-\frac{x\log p}{\pi},p\right). \end{cases}$$

64. Si l'on substitue les θfonctions dans les formules (1), (2) et (3) ou dans les formules (4), (5) et (6) du **48** on trouvera:

(1) $$\operatorname{sinam} u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2K}\right)},\quad \text{ou: } \operatorname{sinam}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_1 x}{\theta x},$$

(2) $$\operatorname{cosam} u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2K}\right)},\quad \text{ou: } \operatorname{cosam}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_2 x}{\theta x},$$

(3) $$\Delta\operatorname{am} u = \sqrt{k'}\cdot\frac{\theta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2K}\right)},\quad \text{ou: } \Delta\operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \sqrt{k'}\cdot\frac{\theta_3 x}{\theta x}.$$

En substituant ces valeurs dans les équations fondamentales:
$\cos^2\operatorname{am} u = 1 - \sin^2\operatorname{am} u,\ \Delta^2\operatorname{am} u = 1 - k^2\sin^2\operatorname{am} u,$
on trouve: $k'\theta_2^2 x = k\theta^2 x - \theta_1^2 x,\ k'\theta_3^2 x = \theta^2 x - k\theta_1^2 x,$
desquelles on tire:

(4)
$$\begin{cases} \theta^2 x = k\theta_1^2 x + k'\theta_3^2 x, \\ \theta_1^2 x = k\theta^2 x - k'\theta_2^2 x, \\ \theta_2^2 x = k\theta_3^2 x - k'\theta_1^2 x, \\ \theta_3^2 x = k\theta_2^2 x + k'\theta^2 x. \end{cases}$$

On peut aussi déduire les trois dernières de ces formules de la première, si l'on y pose successivement $x + \frac{i}{2}\log q$, $x + \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\log q$ et $x + \frac{\pi}{2}$ au lieu de x.

Si l'on pose $x = o$ on trouvera, en remarquant que $\theta_1 o = o$:

5) $$k = -\frac{\theta_2^2 o}{\theta_3^2 o}, \quad k' = \frac{\theta^2 o}{\theta_3^2 o}.$$

Si l'on donne dans les quatre équations (4) à x des valeurs différentes x, y, z, ω, puis qu'on élimine k et k' entre trois quelconques de ces équations, on trouvera les formules suivantes:

$$-\frac{\theta^2 x \cdot \theta_2^2 y + \theta_3^2 x \cdot \theta_1^2 y}{\theta_1^2 x \cdot \theta_2^2 y + \theta_3^2 x \cdot \theta^2 y} = \frac{\theta^2 x \cdot \theta_1^2 z + \theta_3^2 x \cdot \theta_2^2 z}{\theta_1^2 x \cdot \theta_1^2 z + \theta_3^2 x \cdot \theta_3^2 z} =$$

$$= -\frac{\theta^2 x \cdot \theta^2 \omega - \theta_3^2 x \cdot \theta_3^2 \omega}{\theta_1^2 x \cdot \theta^2 \omega - \theta_3^2 x \cdot \theta_2^2 \omega} = \frac{\theta_1^2 y \cdot \theta^2 z - \theta_2^2 y \cdot \theta_2^2 z}{\theta^2 y \cdot \theta_1^2 z - \theta_2^2 y \cdot \theta_3^2 z} =$$

$$= -\frac{\theta_1^2 y \cdot \theta^2 \omega + \theta_2^2 y \cdot \theta_3^2 \omega}{\theta^2 y \cdot \theta^2 \omega + \theta_2^2 y \cdot \theta_2^2 \omega} = \frac{\theta_2^2 z \cdot \theta^2 \omega + \theta_1^2 z \cdot \theta_3^2 \omega}{\theta_3^2 z \cdot \theta^2 \omega + \theta_1^2 z \cdot \theta_3^2 \omega},$$

et de là:

(6)
$$\begin{cases} \theta^2 x \cdot \theta^2 y - \theta_1^2 x \cdot \theta_1^2 y + \theta_2^2 x \cdot \theta_2^2 y - \theta_3^2 x \cdot \theta_3^2 y = 0, \\ \theta^2 x \cdot \theta_3^2 y - \theta_1^2 x \cdot \theta_2^2 y + \theta_2^2 x \cdot \theta_1^2 y - \theta_3^2 x \cdot \theta^2 y = 0, \\ \theta^2 x \cdot \theta_1^2 y - \theta_1^2 x \cdot \theta^2 y - \theta_2^2 x \cdot \theta_3^2 y + \theta_3^2 x \cdot \theta_2^2 y = 0, \\ \theta^2 x \cdot \theta_2^2 y - \theta_1^2 x \cdot \theta_3^2 y - \theta_2^2 x \cdot \theta^2 y + \theta_3^2 x \cdot \theta_1^2 y = 0. \end{cases}$$

65. Si dans les formules (2), (3), (4) et (5) du **62** on pose x = o, après avoir divisé la formule (3) par x, on trouvera les formules suivantes:

(1) $$\theta o = \prod_1^\infty (1-q^{2m-1})^2 \cdot (1-q^{2m}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m \cdot q^{m^2} = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^m \cdot q^{m^2} =$$

$$= 2\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{p} \cdot \prod_1^\infty (1+p^{2n})^2 \cdot (1-p^{2n}) = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} =$$

$$= 2\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \sum_1^\infty p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2};$$

(2) $$\theta_1' o = 2\sqrt[4]{q} \cdot \prod_1^\infty (1-q^{2m})^3 = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m \cdot (2m-1) q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} = -2\sum_1^\infty (-1)^m (2m-1) q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} =$$

$$= -2\frac{\log p}{\pi} \cdot \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{p} \cdot \prod_1^\infty (1-p^{2n})^3 = 2\frac{\log p}{\pi} \cdot \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \sum_1^\infty (-1)^n (2n-1) p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2};$$

(3) $$\theta_2 o = 2\sqrt[4]{q} \cdot \prod_1^\infty (1+q^{2m})^2 \cdot (1-q^{2m}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} = 2\sum_1^\infty q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \prod_1^\infty (1-p^{2n-1})^2 \cdot (1-p^{2n}) = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^{n^2} = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \left\{ 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n p^{n^2} \right\};$$

(4) $$\theta_3 o = \prod_1^\infty (1+q^{2m-1})^2 \cdot (1-q^{2m}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2} = 1 + 2\sum_1^\infty q^{m^2} =$$

$$\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \prod_1^\infty (1+p^{2n-1})^2 \cdot (1-p^{2n}) = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} p^{n^2} = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}} \cdot \left\{ 1 + 2\sum_1^\infty p^{n^2} \right\}.$$

Entre ces quatres fonctions de q il-y-a la relation remarquable:

(5) $$\theta o \cdot \theta_2 o \cdot \theta_3 o = \theta_1' o.$$

En effet on a:

$$\theta o \,.\, \theta_2 o \,.\, \theta_3 o = 2\sqrt[4]{q}.\prod_1^\infty{}_m(1-q^{2m-1})^2.(1+q^{2m})^2.(1+q^{2m-1})^2.(1-q^{2m})^3 =$$

$$= 2\sqrt[4]{q}.\prod_1^\infty{}_m(1-q^{2m-1})^2.(1-q^{2m})^2.\prod_1^\infty{}_m(1+q^{2m})^2.(1+q^{2m-1})^2.\prod_1^\infty{}_m(1-q^{2m}) =$$

$$= 2\sqrt[4]{q}.\prod_1^\infty{}_m(1-q^{m})^2.\prod_1^\infty{}_m(1+q^{m})^2.\prod_1^\infty{}_m(1-q^{2m}) = 2\sqrt[4]{q}.\prod_1^\infty{}_m(1-q^{2m})^3 = \theta_1{}'o.$$

Des formules (1), (2), (3) et (4) on trouve:

(6) $$\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{q}\,.\,\frac{\theta o}{\theta_1{}'o} = 2\sqrt[4]{q}\,.\,\frac{1}{\theta_2 o\,.\,\theta_3 o};$$

(7) $$\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{q}\,.\,\frac{\theta o}{\theta_2 o};$$

(8) $$\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1-q^{2m}}{1+q^{2m}}\right)^2 = \frac{\theta'_1 o}{\theta_2 o} = \theta o\,.\,\theta_3 o;$$

(9) $$\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\right)^2 = \frac{\theta o}{\theta_3 o};$$

(10) $$\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1+q^{2m-1}}{1-q^{2m}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{q}\,.\,\frac{\theta_3 o}{\theta_1{}'o} = 2\sqrt[4]{q}\,.\,\frac{1}{\theta o\,.\,\theta_2 o};$$

(11) $$\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1+q^{2m-1}}{1+q^{2m}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{q}\,.\,\frac{\theta_3 o}{\theta_2 o};$$

(12) $$\prod_1^\infty{}_n\left(\frac{1-p^{2n-1}}{1-p^{2n}}\right)^2 = -2\sqrt[4]{p}\,.\,\frac{\log p}{\pi}\,.\,\frac{\theta_2 o}{\theta_1{}'o} = -2\sqrt[4]{p}\,.\,\frac{\log p}{\pi}\,.\,\frac{1}{\theta o\,.\,\theta_3 o};$$

(13) $$\prod_1^\infty{}_n\left(\frac{1-p^{2n-1}}{1+p^{2n}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{p}\,.\,\frac{\theta_2 o}{\theta o};$$

(14) $$\prod_1^\infty{}_n\left(\frac{1-p^{2n}}{1+p^{2n}}\right)^2 = -\frac{\pi}{\log p}\,.\,\frac{\theta'_1 o}{\theta o} = -\frac{\pi}{\log p}\,.\,\theta_2 o\,.\,\theta_3 o;$$

(15) $$\prod_1^\infty{}_n\left(\frac{1-p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}}\right)^2 = \frac{\theta_2 o}{\theta_3 o};$$

(16) $$\prod_1^\infty{}_n\left(\frac{1+p^{2n-1}}{1-p^{2n}}\right)^2 = -2\sqrt[4]{p}\,.\,\frac{\log p}{\pi}\,.\,\frac{\theta_3 o}{\theta_1{}'o} = -2\sqrt[4]{p}\,.\,\frac{\log p}{\pi}\,\frac{1}{\theta o\,.\,\theta_2 o};$$

(17) $$\prod_1^\infty{}_n\left(\frac{1+p^{2n-1}}{1+p^{2n}}\right)^2 = 2\sqrt[4]{p}\,.\,\frac{\theta_3 o}{\theta o}\,.$$

En comparant ces formules avec les formules du 48:

$$\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1-q^{2m}}\right)^2 = \frac{\pi\sqrt[4]{q}}{K\sqrt{k}},\quad \prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m}}\right)^2 = \frac{2\sqrt{k'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}},\quad \prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1-q^{2m-1}}{1+q^{2m-1}}\right)^2 = \sqrt{k'},$$

$$\prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n}}\right)^2 = \frac{\pi}{2K'\sqrt{k}},\quad \prod_1^\infty{}_m\left(\frac{1+p^{2n}}{1-p^{2n-1}}\right)^2 = \frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{k}.\sqrt[4]{p}},\quad \prod_1^\infty{}_n\left(\frac{1+p^{2n}}{1+p^{2n-1}}\right)^2 = \frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt[4]{p}}$$

on trouve:

(18) $$k = \frac{\theta_2^2 o}{\theta_3^2 o},\quad k' = \frac{\theta^2 o}{\theta_3^2 o},\quad K = \frac{\pi}{2}\,.\,\theta_3^2 o,\quad K' = -\frac{\pi^2}{2\log p}\,.\,\theta_3^2 o.$$

Les deux premières de ces formules coincident avec les formules (5) du paragraphe précédent. On en tire en vertu de la formule: $k^2+k'^2=1$:

(19) $$\theta^4 0 + \theta_2^4 0 = \theta_3^4 0.$$

Si dans les formules (8) du **63** on pose $x = 0$, on trouvera entre les $\theta 0$ fonctions au nome q, et celles au nome p les relations suivantes:

(20) $$\begin{cases} \theta(0, q) = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\theta_2(0, p), \ \theta_1(0, q) = i\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\theta_1(0, p), \\ \theta_2(0, q) = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\theta(0, p), \ \theta_3(0, q) = \sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}.\theta_3(0, p). \end{cases}$$

66. Cherchons maintenant ce que devient le théorème d'Abel sur l'addition des fonctions elliptiques, si l'on y substitue les θfonctions au lieu des fonctions elliptiques. Ce théorème dans sa plus grande simplicité énonçait que, si l'équation:

$$\sin\mathrm{am}\, u(a + \sin^2\mathrm{am}\, u) + b \cdot \cos\mathrm{am}\, u \cdot \Delta\mathrm{am}\, u = 0$$

est satisfaite par les trois valeurs de u: u_1, u_2, u_3, on aura: $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, $b = -\sin\mathrm{am}\, u_1 \cdot \sin\mathrm{am}\, u_2 \cdot \sin\mathrm{am}\, u_3$, $a+1 = \cos\mathrm{am}\, u_1 \cdot \cos\mathrm{am}\, u_2, \cos\mathrm{am}\, u_3$, $ak^2 + 1 = \Delta\mathrm{am}\, u_1 \cdot \Delta\mathrm{am}\, u_2 \cdot \Delta\mathrm{am}\, u_3$.

Or si l'on substitue ici les valeurs précédentes de $\sin\mathrm{am}\, u$, $\cos\mathrm{am}\, u$, $\Delta\mathrm{am}\, u$, et qu'on pose $\frac{\pi u}{2K} = x$, ce théorème prendra la forme suivante:

Si l'équation:

(1) $$\theta_1 x(ak\theta^2 x + \theta_1^2 x) + bkk'\theta x \cdot \theta_2 x \cdot \theta_3 x = 0$$

a lieu pour les trois valeurs de x: x_1, x_2 et x_3, on aura: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$b = -\frac{1}{k\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_1 x_1 \cdot \theta_1 x_2 \cdot \theta_1 x_3}{\theta x_1 \cdot \theta x_2 \cdot \theta x_3}, \quad a + 1 = \frac{k'\sqrt{k'}}{k\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_2 x_1 \cdot \theta_2 x_2 \cdot \theta_2 x_3}{\theta x_1 \cdot \theta x_2 \cdot \theta x_3},$$

$$ak^2 + 1 = k'\sqrt{k'} \cdot \frac{\theta_3 x_1 \cdot \theta_3 x_2 \cdot \theta_3 x_3}{\theta x_1 \cdot \theta x_2 \cdot \theta x_3}.$$

Considérons maintenant la fonction de x, qui forme le membre gauche de l'équation (1), et posons:

$$\theta_1 x \cdot (ak\theta^2 x + \theta_1^2 x) + bkk' \theta x \cdot \theta_2 x \cdot \theta_3 x = f(x).$$

En substituant ici les valeurs des θfonctions du **62**:

$$\theta x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \cdot q^{m^2} \cdot e^{2mix}, \quad \theta_1 x = i\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \cdot q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} \cdot e^{(2m-1)ix},$$

$$\theta_2 x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} \cdot e^{(2m-1)ix}, \quad \theta_3 x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{m^2} \cdot e^{2mix},$$

on trouvera que la fonction f(x) est de la forme:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r A_r e^{(2r-1)ix},$$

où A_r est une fonction de l'indice r, de q, a et b, donc de q, x_1, x_2 et x_3.

De plus il résulte des formules (4) du **63** que:

$$f(x + mi\log q) = (-1)^m \cdot q^{-3m^2} \cdot e^{6mix} \cdot f(x).$$

De là on peut déduire les valeurs des coefficients A_r en fonctions de trois entre eux. En effet en substituant:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r A_r\, e^{(2r-1)ix} \text{ on trouve:}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r A_r\, q^{-(2r-1)m}.\ e^{(2r-1)ix} = (-1)^m.\, q^{-3m^2}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r A_r\, e^{(2r+6m-1)ix},$$

et de là, si l'on pose dans le membre gauche $r + 3m$ au lieu de r:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r A_{r+3m}\cdot q^{-(2r+6m-1)m}\cdot e^{(2r+6m-1)ix} = (-1)^m.\, q^{-3m^2}.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r A_r\,.\ e^{(2r+6m-1)ix},$$

donc: $A_{r+3m} = (-1)^m\,.\,q^{(2r+3m-1)m}\,.\,A_r$, et, si l'on pose successivement $r = o$, $r = 1$, $r = 2$:

$A_{3m} = (-1)^m.q^{(3m-1)m}.\,A_0$, $A_{3m+1} = (-1)^m.\ q^{(3m+1)m}.\,A_1$, $A_{3m+2} = (-1)^m.q^{(3m+3)m}.\,A_2$.

On a donc, puisque tout nombre entier r a l'une des trois formes: $3m$, $3m + 1$ ou $3m + 2$:

$$f(x) = A_0\,.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.\ q^{(3m-1)m}.\ e^{(6m-1)ix} + A_1.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.\ q^{(3m+1)m}.\ e^{(6m+1)ix} +$$

$$+ A_2'\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.\ q^{(3m+3)m}\,.\ e^{(6m+3)ix}.$$

Le produit: $\theta_1(x-x_1)\,.\,\theta_1(x-x_2)\,.\,\theta_1(x-x_3) = F(x)$ est de la même forme: $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r B_r\, e^{(2r-1)ix}$, où B_r est une fonction de r, q, x_1, x_2, x_3, et ce produit a la même propriété que la fonction f(x), savoir que:

$$F(x + m i \log q) = (-1)^m.\, q^{-3m^2}.\, e^{6mix}.\, F(x).$$

Donc on a:

$$F(x) = B_0.\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.\ q^{(3m-1)m}.\ e^{(6m-1)ix} + B_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.\ q^{(3m+1)m}\,.\ e^{(6m+1)ix} +$$

$$+ B_2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m(-1)^m.\ q^{(3m+3)m}.\ e^{(6m+3)ix}.$$

Or les deux fonctions f(x) et F(x) disparaissent toutes les deux pour les trois valeurs de x: x_1, x_2 et x_3; donc il faut que:

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = C,$$

où C est une fonction de q, x_1, x_2 et x_3. Donc enfin on a:

$\theta_1 x\,.\,(ak\,\theta^2 x + \theta_1^2 x) + bkk'.\,\theta x\,.\,\theta_2 x\,.\,\theta_3 x = C\,.\,\theta_1(x-x_1).\theta_1(x-x_2).\,\theta_1(x-x_3)$,

ou, si l'on divise par $k\sqrt{k}\,.\,\theta^3 x$, et pose C au lieu de $\frac{C}{k\sqrt{k}}$:

$$(2)\quad \sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\left(a + \sin^2 am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)\right) + b\,.\,\cos am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right).\Delta am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) =$$

$$= C\,.\,\frac{\theta_1(x-x_1)\ .\ \theta_1(x-x_2)\ .\ \theta_1(x-x_3)}{\theta^3 x},$$

où $x_1 + x_2 + x_3 = o$, $b = -\sin am\left(\frac{2Kx_1}{\pi}\right).\sin am\left(\frac{2Kx_2}{\pi}\right).\sin am\left(\frac{2Kx_3}{\pi}\right)$,

$$a + 1 = \cos am\left(\frac{2Kx_1}{\pi}\right).\cos am\left(\frac{2Kx_2}{\pi}\right).\cos am\left(\frac{2Kx_3}{\pi}\right),$$

$$ak^2 + 1 = \Delta am\left(\frac{2Kx_1}{\pi}\right).\Delta am\left(\frac{2Kx_2}{\pi}\right).\Delta am\left(\frac{2Kx_3}{\pi}\right).$$

Pour déterminer C on pose $x = o$, et on trouve de là:

$$b = -C.\frac{\theta_1 x_1 \cdot \theta_1 x_2 \cdot \theta_1 x_3}{\theta^3 o}, \text{ donc:}$$

$$C = \theta^3 o \frac{\sin am\left(\frac{2Kx_1}{\pi}\right).\sin am\left(\frac{2Kx_2}{\pi}\right).\sin am\left(\frac{2Kx_3}{\pi}\right)}{\theta_1 x_1 \cdot \theta_1 x_2 \cdot \theta_1 x_3} =$$

$$= \frac{\theta^3 o}{k\sqrt{k}\,.\,\theta x_1 \,.\, \theta x_2 \,.\, \theta x_3}.$$

Si dans l'équation (2) on pose $x + \frac{\pi}{2}$ au lieu de x, donc $\frac{2Kx}{\pi} + K$ au lieu de $\frac{2Kx}{\pi}$, on trouvera, en ayant égard aux formules (1) du **22**:

$$\sin am\,(u + K) = \frac{\cos am\, u}{\Delta am\, u},\ \cos am\,(u+K) = -k'.\frac{\sin am\, u}{\Delta am\, u},\ \Delta am(u+K) = \frac{k'}{\Delta am\, u},$$

et aux formules (1) du **63**: $\theta(x + \frac{\pi}{2}) = \theta_3 x$, $\theta_1(x + \frac{\pi}{2}) = \theta_2 x$,

et enfin en multipliant par $\Delta^3 am(\frac{2Kx}{\pi}) = k'\sqrt{k'}.\frac{\theta_3^3 x}{\theta^3 x}$:

$$(3)\quad \cos am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)(ak'^2 + (ak^2+1).\cos^2 am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)) - bk'^2 \sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right).\Delta am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) =$$

$$= C\,.\,k'\sqrt{k'}.\frac{\theta_2(x-x_1)\,.\,\theta_2(x-x_2)\,.\,\theta_2(x-x_3)}{\theta^3 x}.$$

Si l'on pose $x + \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2}\log q$ au lieu de x, donc: $\frac{2Kx}{\pi} + K + iK'$ au lieu de $\frac{2Kx}{\pi}$, on trouvera en ayant égard aux formules (4) du **22**:

$$\sin am\,(u + K + iK') = \frac{1}{k}.\frac{\Delta am\, u}{\cos am\, u},\ \cos am(u + K + iK') = -\frac{ik'}{k}.\frac{1}{\cos am\, u},$$

$$\Delta am\,(u + K + iK') = ik'.\frac{\sin am\, u}{\cos am\, u},$$

et aux formules (5) du **63**:

$$\theta(x + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{i}{2}\log q) = i.\frac{e^{-ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta_2 x,\ \theta_1(x + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{i}{2}\log q) = i.\frac{e^{-ix}}{\sqrt[4]{q}}.\theta_3 x,$$

et enfin en multipliant par $k^3\cos^3 am(\frac{2Kx}{\pi}) = k\sqrt{k}\,.\,k'\sqrt{k'}.\frac{\theta_2^3 x}{\theta^3 x}$:

$$(4)\quad \Delta am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)((a+1).\Delta^2 am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) - ak'^2) + bk^2k'^2 \sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right).\cos am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) =$$

$$= Ck\sqrt{k}\,.\,k'\sqrt{k'}.\frac{\theta_3(x-x_1)\,.\,\theta_3(x-x_2)\,.\,\theta_3(x-x_3)}{\theta^3 x}.$$

Enfin, si l'on pose $x - \frac{i}{2}\log q$ au lieu de x, donc: $\frac{2Kx}{\pi} + iK'$ au lieu de $\frac{2Kx}{\pi}$, on trouvera en ayant égard aux formules (5) du **22**:

$\sin am\,(u + iK') = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sin am\,u}$, $\cos am\,(u+iK') = -\frac{i}{k} \cdot \frac{\Delta am\,u}{\sin am\,u}$,

$\Delta am\,(u + iK') = -i\,\frac{\cos am\,u}{\sin am\,u}$, et aux formules (3) du **63**:

$\theta(x - \frac{i}{2}\log q) = i.\frac{e^{-ix}}{\sqrt[4]{q}} \cdot \theta_1 x$, $\theta_1(x - \frac{i}{2}\log q) = i.\frac{e^{-ix}}{\sqrt[4]{q}} \cdot \theta x$,

et enfin en multipliant par: $k^3 \sin^3 am(\frac{2Kx}{\pi}) = k\sqrt{k} \cdot \frac{\theta_1^3 x}{\theta^3 x}$:

$$(5)\quad 1 + ak^2 \cdot \sin^2 am(\tfrac{2Kx}{\pi}) - bk^2 \sin am(\tfrac{2Kx}{\pi}) \cdot \cos am(\tfrac{2Kx}{\pi}) \cdot \Delta am(\tfrac{2Kx}{\pi}) = Ck\sqrt{k} \cdot \frac{\theta(x-x_1)\,\theta(x-x_2)\,\theta(x-x_3)}{\theta^3 x}.$$

En général on trouve de la même manière que, si f(x) et F(x) sont deux fonctions entières de x, l'une paire, l'autre impaire, f(x) du degré n et F(x) du degré n — 3, ou bien f(x) du degré n — 1 et F(x) du degré n — 2, on a:

$$(6)\quad f(\sin am(\tfrac{2Kx}{\pi})) + F(\sin am(\tfrac{2Kx}{\pi})) \cdot \cos am(\tfrac{2Kx}{\pi}) \cdot \Delta am(\tfrac{2Kx}{\pi}) = C \cdot \frac{\theta_1(x-x_1) \cdot \theta_1(x-x_2) \ldots \theta_1(x-x_n)}{\theta^n x},$$

où le membre droit disparaît pour les n valeurs de x: $x_1, x_2, \ldots x_3$, ce qui donne n équations, à l'aide desquelles on déterminera les n — 1 coefficients des fonctions: $f(\sin am(\frac{2Kx}{\pi}))$ et $F(\sin am(\frac{2Kx}{\pi}))$, et trouvera de plus la relation: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = o$.

Pour déterminer le coefficient C on pose x = o, et on trouvera alors:

$$C = (-1)^n \frac{(f(o) + F(o))\,\theta^n o}{\theta_1 x_1 \cdot \theta_1 x_2 \cdot \theta_1 x_3 \ldots \theta_1 x_n}.$$

De même on a:

$$(7)\quad f(\cos am(\tfrac{2Kx}{\pi})) + F(\cos am(\tfrac{2Kx}{\pi})) \cdot \sin am(\tfrac{2Kx}{\pi}) \cdot \Delta am(\tfrac{2Kx}{\pi}) = C' \cdot \frac{\theta_2(x-x_1) \cdot \theta_2(x-x_2) \ldots \theta_2(x-x_n)}{\theta^n x},$$

où le membre droit disparaît pour les n valeurs de x: $x_1 + \frac{\pi}{2}, x_2 + \frac{\pi}{2}, \ldots x_n + \frac{\pi}{2}$, ce qui donne n équations, à l'aide desquelles on déterminera les n — 1 coefficients des fonctions $f(\cos am(\frac{2Kx}{\pi}))$ et $F(\cos am(\frac{2Kx}{\pi}))$, et trouvera de plus la relation: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = o$. Pour déterminer le coefficient C' on pose x = o, et on trouvera de là

$$C' = \frac{f(1) \cdot \theta^n o}{\theta_2 x_1 \cdot \theta_2 x_2 \cdot \theta_2 x_3 \ldots \theta_2 x_n}.$$

De même on a:

$$(8)\qquad f(\Delta am(\frac{2Kx}{\pi})) + F(\Delta am(\frac{2Kx}{\pi})) \cdot \sin am(\frac{2Kx}{\pi}) \cdot \cos am(\frac{2Kx}{\pi}) =$$

$$= C'' \cdot \frac{\theta_3(x-x_1) \cdot \theta_3(x-x_2) \ldots \theta_3(x-x_n)}{\theta^n x}$$

où le membre droit disparaît pour les n valeurs de x:
$x_1 + \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\log q, x_2 + \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\log q, \ldots . x_n + \frac{i}{2} + \frac{\pi}{2}\log q$, ce qui donne n équations, à l'aide desquelles on déterminera les n−1 coefficients des fonctions $f(\Delta am(\frac{2Kx}{\pi}))$ et $F(\Delta am(\frac{2Kx}{\pi}))$ et trouvera de plus la relation: $x_1 + x_2 \ldots + x_n = o$. Pour déterminer le coefficient C'' on pose $x = o$, et trouvera de là:

$$C'' = \frac{f(1) \cdot \theta^n(o)}{\theta_3 x_1 \cdot \theta_3 x_2 \cdot \theta_3 x_3 \ldots \theta_3 x_n}.$$

Enfin on aura, si f(x) est du degré n et F(x) du degré n−3:

$$(9)\quad f(\sin am\frac{2Kx}{\pi})) + F(\sin am(\frac{2Kx}{\pi})) \cdot \sin am(\frac{2Kx}{\pi}) \cdot \cos am(\frac{2Kx}{\pi}) \cdot \Delta am(\frac{2Kx}{\pi}) =$$

$$= C''' \frac{\theta(x-x_1) \cdot \theta(x-x_2) \ldots . \theta(x-x_n)}{\theta^n x},$$

et si f(x) est du degré n−1, et F(x) du degré n−2:

$$(10)\quad \sin am(\frac{2Kx}{\pi}) \cdot f(\sin am(\frac{2Kx}{\pi})) + F(\sin am(\frac{2Kx}{\pi})) \cdot \cos am(\frac{2Kx}{\pi}) \cdot \Delta am(\frac{2Kx}{\pi}) =$$

$$= C'''' \frac{\theta(x-x_1) \cdot \theta(x-x_2) \ldots . \theta(x-x_n)}{\theta^n x},$$

où le membre droit disparaît pour les n valeurs de x:
$x_1 + \frac{i}{2}\log q, x_2 + \frac{i}{2}\log q, \ldots x_n + \frac{i}{2}\log q$, ce qui donne n équations par lesquelles on déterminera les n−1 coefficients des fonctions: $f(\sin am(\frac{2Kx}{\pi}))$ et $F(\sin am(\frac{2Kx}{\pi}))$, et on trouvera de plus: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = o$. Pour déterminer les coefficients C''' et C'''' on pose $x = o$, et on trouvera de là:

$$C''' = \frac{f(o) \cdot \theta^n o}{\theta x_1 \cdot \theta x_2 \ldots \theta x_n}, \quad C'''' = \frac{F(o) \cdot \theta^n o}{\theta x_1 \cdot \theta x_2 \ldots \theta x_n}.$$

67. Si dans les équations (2), (3), (4) et (5) du paragraphe précédent on pose: $x_1 = y, x_2 = -y$, on aura: $x_3 = o$, $b = o$, $a + 1 = \cos^2 am(\frac{2Ky}{\pi})$, $a = -\sin^2 am(\frac{2Ky}{\pi})$, $ak^2 + 1 = \Delta^2 am(\frac{2Ky}{\pi})$, $C = \frac{\theta^2(o)}{k\sqrt{k} \cdot \theta^2(y)}$.

L'équation (2) deviendra alors:

$$\sin am(\frac{2Kx}{\pi}) \cdot (\sin^2 am(\frac{2Kx}{\pi}) - \sin^2 am(\frac{2Ky}{\pi})) = \frac{\theta^2 o \cdot \theta_1(x-y) \cdot \theta_1(x+y) \cdot \theta_1(x)}{k\sqrt{k} \cdot \theta^2 y \cdot \theta^3 x},$$

et de là, si l'on divise par: $\sin am(\frac{2Kx}{\pi}) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_1 x}{\theta x}$:

$$\sin^2 am(\frac{2Kx}{\pi}) - \sin^2 am(\frac{2Ky}{\pi}) = \frac{\theta^2 o \cdot \theta_1(x-y) \cdot \theta_1(x+y)}{k \cdot \theta^2 y \cdot \theta^2 x}.$$

Si l'on substitue ici les valeurs:

$$\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_1 x}{\theta x}, \quad \sin am\left(\frac{2Ky}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_1 y}{\theta y},$$

on en tire enfin:

$$\theta_1(x+y) \cdot \theta_1(x-y) = \frac{1}{\theta^2(o)} \cdot (\theta_1^2 x \cdot \theta^2 y - \theta^2 x \cdot \theta_1^2 y).$$

On peut aussi facilement déduire cette équation de la formule (7) du **10**:

$$\sin am(u+v) \cdot \sin am(u-v) = \frac{\sin^2 am\, u - \sin^2 am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \cdot \sin^2 am\, v}.$$

En effet on en tire en substituant les θfonctions au lieu des sin am:

$$\theta_1(x+y) \cdot \theta_1(x-y) = C(\theta_1^2 x \cdot \theta^2 y - \theta^2 x \cdot \theta_1^2 y),$$
$$\theta(x+y) \cdot \theta(x-y) = C(\theta^2 x \cdot \theta^2 y - \theta_1^2 x \cdot \theta_1^2 y),$$

où C est une quantité constante, c'est à dire fonction de q. En effet si C était une fonction de x, il fallait que pour une valeur quelconque de y on eût simultanément:

$$\theta_1(x+y) \cdot \theta_1(x-y) = o, \text{ et } \theta(x+y) \cdot \theta(x-y) = o,$$

ou bien simultanément:

$$\theta_1(x+y) \cdot \theta_1(x-y) = \infty, \text{ et } \theta(x+y) \cdot \theta(x-y) = \infty.$$

De chaque groupe de ces équations on tire: $\sin am(u+v) = o$ et $\sin am(u-v) = \infty$, donc en vertu du **25**: $u+v = 2nK + 2miK'$, et $u-v = 2n'K + (2m'-1)iK'$, où n, m, n', m' sont des nombres entiers, lesquelles équations ne peuvent pas avoir lieu simultanément pour une valeur quelconque de y, donc de $v = \frac{2Ky}{\pi}$; — ou bien: $\sin am(u+v) = \infty$. et $\sin am(u-v) = o$, donc: $u+v = 2nK + (2m-1)iK'$, $u-v = 2n'K + 2m'iK'$. lesquelles équations ne peuvent pas avoir lieu simultanément pour une valeur quelconque de v. Donc C ne peut pas être fonction de x. De la même manière on trouve que C ne peut pas être fonction de y. Donc C est une quantité constante, c'est à dire fonction de q seulement. Pour la trouver on pose $y = o$, et on aura alors:

$$\theta_1^2 x = C \cdot \theta_1^2 x \cdot \theta^2 o, \quad C = \frac{1}{\theta^2 o}.$$

On peut mettre l'équation:

$$\theta_1(x+y) \cdot \theta_1(x-y) = \frac{1}{\theta^2 o} \cdot (\theta_1^2 x \cdot \theta^2 y - \theta^2 x \cdot \theta_1^2 y) =$$
$$= k \cdot \frac{\theta^2 x \cdot \theta^2 y}{\theta^2 o} \cdot (\sin^2 am\, u - \sin^2 am\, v),$$

sous cinq autres formes en ayant égard aux formules du **5**:

$$\sin^2 am\, u - \sin^2 am\, v = \cos^2 am\, v - \cos^2 am\, u = \frac{1}{k^2}(\Delta^2 am\, v - \Delta^2 am\, u) =$$

$$= \frac{1}{k'^2}(\Delta^2 am\, u \cdot \cos^2 am\, v - \cos^2 am\, u \cdot \Delta^2 am\, v) =$$

$$= \sin^2 am\, u \cdot \Delta^2 am\, v - \Delta^2 am\, u \cdot \sin^2 am\, v = \sin^2 am\, u \cdot \cos^2 am\, v - \cos^2 am\, u \cdot \sin^2 am\, v.$$

En substituant ici les valeurs:

$$\sin\mathrm{am}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_1 x}{\theta x},\quad \cos\mathrm{am}\,u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_2 x}{\theta x},\quad \Delta\mathrm{am}\,u = \sqrt{k'}\cdot\frac{\theta_3 x}{\theta x},$$

et en ayant égard aux formules du **64**:

$$k = \frac{\theta_2^2 0}{\theta_3^2 0},\quad k' = \frac{\theta^2 0}{\theta_3^2 0},\quad \text{donc: } \theta_2^2 0 = \frac{k}{k'}\cdot\theta^2 0,\quad \theta_3^2 0 = \frac{1}{k'}\cdot\theta^2 0,$$

on trouvera les formules:

(1) $$\theta_1(x+y)\,.\,\theta_1(x-y) =$$

$$= \frac{1}{\theta^2 0}(\theta_1^2 x.\theta^2 y - \theta^2 x.\theta_1^2 y) = \frac{1}{\theta_3^2 0}(\theta^2 x.\theta_2^2 y - \theta_2^2 x.\theta^2 y) = \frac{1}{\theta_2^2 0}(\theta^2 x.\theta_3^2 y - \theta_3^2 x.\theta^2 y) =$$

$$= \frac{1}{\theta^2 0}(\theta_3^2 x.\theta_2^2 y - \theta_2^2 x.\theta_3^2 y) = \frac{1}{\theta_3^2 0}(\theta_1^2 x.\theta_3^2 y - \theta_3^2 x.\theta_1^2 y) = \frac{1}{\theta_2^2 0}(\theta_1^2 x.\theta_2^2 y - \theta_2^2 x.\theta_1^2 y).$$

Si l'on pose ici $x + \frac{\pi}{2}$ au lieu de x, on trouvera:

(2) $$\theta_2(x+y)\,.\,\theta_2(x-y) =$$

$$= \frac{1}{\theta^2 0}(\theta_2^2 x.\theta^2 y - \theta_3^2 x.\theta_1^2 y) = \frac{1}{\theta_3^2 0}(\theta_3^2 x.\theta_2^2 y - \theta_1^2 x.\theta^2 y) = \frac{1}{\theta_2^2 0}(\theta_3^2 x.\theta_3^2 y - \theta^2 x.\theta^2 y) =$$

$$= \frac{1}{\theta^2 0}(\theta^2 x.\theta_2^2 y - \theta_1^2 x.\theta_3^2 y) = \frac{1}{\theta_3^2 0}(\theta_2^2 x.\theta_3^2 y - \theta^2 x.\theta_1^2 y) = \frac{1}{\theta_2^2 0}(\theta_2^2 x.\theta_2^2 y - \theta_1^2 x.\theta_1^2 y).$$

Si dans les formules (1) on pose $x + \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\log q$ au lieu de x, on trouvera:

(3) $$\theta_3(x+y)\,.\,\theta_3(x-y) =$$

$$= \frac{1}{\theta^2 0}(\theta_3^2 x.\theta^2 y - \theta_2^2 x.\theta_1^2 y) = \frac{1}{\theta_3^2 0}(\theta_2^2 x.\theta_2^2 y + \theta^2 x.\theta^2 y) = \frac{1}{\theta_2^2 0}(\theta_2^2 x.\theta_3^2 y + \theta_1^2 x.\theta^2 y) =$$

$$= \frac{1}{\theta^2 0}(\theta^2 x.\theta_3^2 y - \theta_1^2 x.\theta_2^2 y) = \frac{1}{\theta_3^2 0}(\theta_3^2 x.\theta_3^2 y + \theta_1^2 x.\theta_1^2 y) = \frac{1}{\theta_2^2 0}(\theta_3^2 x.\theta_2^2 y + \theta^2 x.\theta_1^2 y).$$

Enfin si dans les formules (1) on pose $x + \frac{i}{2}\log q$ au lieu de x, on trouvera:

(4) $$\theta(x+y)\,.\,\theta(x-y) =$$

$$= \frac{1}{\theta^2 0}(\theta^2 x.\theta^2 y - \theta_1^2 x.\theta_1^2 y) = \frac{1}{\theta_3^2 0}(\theta_1^2 x.\theta_2^2 y + \theta_3^2 x.\theta^2 y) = \frac{1}{\theta_2^2 0}(\theta_1^2 x\theta_3^2 y + \theta_2^2 x.\theta^2 y) =$$

$$= \frac{1}{\theta^2 0}(\theta_3^2 x.\theta_3^2 y - \theta_2^2 x.\theta_2^2 y) = \frac{1}{\theta_3^2 0}(\theta^2 x.\theta_3^2 y + \theta_2^2 x.\theta_1^2 y) = \frac{1}{\theta_2^2 0}(\theta^2 x.\theta_2^2 y + \theta_3^2 x.\theta_1^2 y).$$

Ces formules correspondent aux formules (7), (8) et (9) du **10**, desquelles on peut les déduire en substituant les θfonctions au lieu des fonctions elliptiques et en multipliant par: $\theta(x+y).\theta(x-y) = \frac{1}{\theta^2 0}(\theta^2 x.\theta^2 y - \theta_1^2 x.\theta_1^2 y)$.

Des formules du **7** et des formules (1)—(6), (10)—(15) du **10** on déduit de même:

(5) $$\theta_1(x+y).\theta(x-y) = \frac{1}{\theta_2 0.\theta_3 0}\,.\,(\theta x.\theta_1 x.\theta_2 y.\theta_3 y + \theta_2 x.\theta_3 x.\theta y.\theta_1 y),$$

(6) $$\theta_2(x+y).\theta(x-y) = \frac{1}{\theta 0\,.\,\theta_2 0}\,.\,(\theta x.\theta_2 x.\theta y.\theta_2 y - \theta_1 x.\theta_3 x.\theta_1 y.\theta_3 y),$$

(7) $\theta_3(x+y).\theta(x-y) = \frac{1}{\theta_0.\theta_{3}0}.(\theta x.\theta_3 x.\theta y.\theta_3 y - \theta_1 x.\theta_2 x.\theta_1 y.\theta_2 y),$

(8) $\theta(x+y).\theta_1(x-y) = \frac{1}{\theta_{2}0.\theta_{3}0}.(\theta x.\theta_1 x.\theta_2 y.\theta_3 y - \theta_2 x.\theta_3 x.\theta y.\theta_1 y),$

(9) $\theta(x+y).\theta_2(x-y) = \frac{1}{\theta_0.\theta_{2}0}.(\theta x.\theta_2 x.\theta y.\theta_2 y + \theta_1 x.\theta_3 x.\theta_1 y.\theta_3 y),$

(10) $\theta(x+y).\theta_3(x-y) = \frac{1}{\theta_0.\theta_{3}0}.(\theta x.\theta_3 x.\theta y.\theta_3 y + \theta_1 x.\theta_2 x.\theta_1 y.\theta_2 y),$

(11) $\theta_1(x+y).\theta(x-y)+\theta(x+y).\theta_1(x-y) = \frac{2}{\theta_{2}0.\theta_{3}0}.\theta x.\theta_1 x.\theta_2 y.\theta_3 y,$

(12) $\theta_2(x+y).\theta(x-y)+\theta(x+y).\theta_2(x-y) = \frac{2}{\theta_0.\theta_{2}0}.\theta x.\theta_2 x.\theta y.\theta_2 y,$

(13) $\theta_3(x+y).\theta(x-y)+\theta(x+y).\theta_3(x-y) = \frac{2}{\theta_0.\theta_{3}0}.\theta x.\theta_3 x.\theta y.\theta_3 y,$

(14) $\theta_1(x+y).\theta(x-y)-\theta(x+y).\theta_1(x-y) = \frac{2}{\theta_{2}0.\theta_{3}0}.\theta_2 x.\theta_3 x.\theta y.\theta_1 y,$

(15) $\theta_2(x+y).\theta(x-y)-\theta(x+y).\theta_2(x-y) = -\frac{2}{\theta_0.\theta_{2}0}.\theta_1 x.\theta_3 x.\theta_1 y.\theta_3 y,$

(16) $\theta_3(x+y).\theta(x-y)-\theta(x+y).\theta_3(x-y) = -\frac{2}{\theta_0.\theta_{3}0}.\theta_1 x.\theta_2 x.\theta_1 y.\theta_2 y.$

(17) $\theta_3(x+y).\theta_2(x-y)+\theta_2(x+y).\theta_3(x-y) = \frac{2}{\theta_{2}0.\theta_{3}0}.\theta_2 x.\theta_3 x.\theta_2 y.\theta_3 y.$

(18) $\theta_3(x+y).\theta_2(x-y)-\theta_2(x+y).\theta_3(x-y) = \frac{2}{\theta_{2}0.\theta_{3}0}.\theta x.\theta_1 x.\theta y.\theta_1 y,$

(19) $\theta_1(x+y).\theta_3(x-y)+\theta_3(x+y).\theta_1(x-y) = \frac{2}{\theta_0.\theta_{2}0}.\theta_1 x.\theta_3 x.\theta y.\theta_2 y.$

(20) $\theta_1(x+y).\theta_3(x-y)-\theta_3(x+y).\theta_1(x-y) = \frac{2}{\theta_0.\theta_{2}0}.\theta x.\theta_2 x.\theta_1 y.\theta_3 y,$

(21) $\theta_1(x+y).\theta_2(x-y)+\theta_2(x+y).\theta_1(x-y) = \frac{2}{\theta_0.\theta_{3}0}.\theta_1 x.\theta_2 x.\theta y.\theta_3 y,$

(22) $\theta_1(x+y).\theta_2(x-y)-\theta_2(x+y).\theta_1(x-y) = \frac{2}{\theta_0.\theta_{3}0}.\theta x.\theta_3 x.\theta_1 y.\theta_2 y.$

Si dans les formules (4), (5), (2) et (3) on pose $y = x$, on en tire de plus:

(23) $\theta 2x = \frac{1}{\theta^3 0}(\theta^4 x - \theta_1^4 x) = \frac{1}{\theta 0.\theta_3^2 0}.(\theta_1^2 x.\theta_2^2 x + \theta^2 x.\theta_3^2 x) =$

$= \frac{1}{\theta 0.\theta_2^2 0}.(\theta_1^2 x.\theta_3^2 x + \theta^2 x.\theta_2^2 x) = \frac{1}{\theta^3 0}(\theta_3^4 x - \theta_2^4 x),$

(24) $\theta_1 2x = \frac{2}{\theta 0.\theta_2 0.\theta_3 0}.\theta x.\theta_1 x.\theta_2 x.\theta_3 x,$

(25) $\theta_2 2x = \frac{1}{\theta^2 0 . \theta_2 0} . (\theta^2 x . \theta_2^2 x - \theta_1^2 x . \theta_3^2 x) = \frac{1}{\theta_2 0 . \theta_3^2 0} . (\theta_2^2 x . \theta_3^2 x - \theta^2 x . \theta_1^2 x) =$

$$= \frac{1}{\theta_2^3 0} . (\theta_3^4 x - \theta^4 x) = \frac{1}{\theta_2^3 0} . (\theta_2^4 x - \theta_1^4 x),$$

(26) $\theta_3 2x = \frac{1}{\theta^2 0 . \theta_3 0} . (\theta^2 x . \theta_3^2 x - \theta_1^2 x . \theta_2^2 x) = \frac{1}{\theta_3^3 0} . (\theta_2^4 x + \theta^4 x) = \frac{1}{\theta_3^3 0} (\theta_3^4 x + \theta_1^4 x)$

$$= \frac{1}{\theta_2^2 0 . \theta_3 0} . (\theta_2^2 x . \theta_3^2 x + \theta^2 x . \theta_1^2 x).$$

Si l'on substitue les θfonctions au lieu des fonctions elliptiques dans les formules du **12**, on trouvera:

(27) $\theta_3 0 . \theta_3 x . \theta_3 y . \theta_3 (x+y) = \theta_2 0 . \theta_2 x . \theta_2 y . \theta_2 (x+y) + \theta 0 . \theta x . \theta y . \theta (x+y),$

(28) $\theta_2 0 . \theta_2 x . \theta y . \theta (x+y) = \theta 0 . \theta x . \theta_2 y . \theta_1 (x+y) + \theta_3 0 . \theta_3 x . \theta_1 y . \theta_1 (x+y),$

(29) $\theta_2 0 . \theta x . \theta_2 y . \theta (x+y) = \theta 0 . \theta_2 x . \theta y . \theta_2 (x+y) + \theta_3 0 . \theta_1 x . \theta_3 y . \theta_1 (x+y),$

(30) $\theta_2 0 . \theta x . \theta y . \theta_2 (x+y) = \theta 0 . \theta_2 x . \theta_2 y . \theta (x+y) - \theta_3 0 . \theta_1 x . \theta_1 y . \theta_3 (x+y),$

(31) $\theta_3 0 . \theta_3 x . \theta y . \theta (x+y) = \theta 0 . \theta x . \theta_3 y . \theta_3 (x+y) + \theta_2 0 . \theta_2 x . \theta_1 y . \theta_1 (x+y),$

(32) $\theta_3 0 . \theta x . \theta_3 y . \theta (x+y) = \theta 0 . \theta_3 x . \theta y . \theta_3 (x+y) + \theta_2 0 . \theta_1 x . \theta_2 y . \theta_1 (x+y),$

(33) $\theta_3 0 . \theta x . \theta y . \theta_3 (x+y) = \theta 0 . \theta_3 x . \theta_3 y . \theta (x+y) - \theta_2 0 . \theta_1 x . \theta_1 y . \theta_2 (x+y),$

(34) $\theta 0 . \theta x . \theta_1 y . \theta_1 (x+y) = \theta_2 0 . \theta_2 x . \theta_3 y . \theta_3 (x+y) - \theta_3 0 . \theta_3 x . \theta_2 y . \theta_2 (x+y),$

(35) $\theta 0 . \theta_1 x . \theta y . \theta_1 (x+y) = \theta_2 0 . \theta_3 x . \theta_2 y . \theta_3 (x+y) - \theta_3 0 . \theta_2 x . \theta_3 y . \theta_2 (x+y),$

(36) $\theta 0 . \theta_1 x . \theta_1 y . \theta (x+y) = \theta_3 0 . \theta_2 x . \theta_2 y . \theta_3 (x+y) - \theta_2 0 . \theta_3 x . \theta_3 y . \theta_2 (x+y),$

(37) $\theta_3 0 . \theta_2 x . \theta_1 y . \theta (x+y) = \theta_2 0 . \theta_3 x . \theta y . \theta_1 (x+y) - \theta 0 . \theta_1 x . \theta_2 y . \theta_3 (x+y),$

(38) $\theta_3 0 . \theta x . \theta_1 y . \theta_2 (x+y) = \theta 0 . \theta_3 x . \theta_2 y . \theta_1 (x+y) - \theta_2 0 . \theta_1 x . \theta y . \theta_3 (x+y),$

(39) $\theta_3 0 . \theta_1 x . \theta_2 y . \theta (x+y) = \theta_2 0 . \theta x . \theta_3 y . \theta_1 (x+y) - \theta 0 . \theta_2 x . \theta_1 y . \theta_3 (x+y),$

(40) $\theta_3 0 . \theta_1 x . \theta y . \theta_2 (x+y) = \theta 0 . \theta_2 x . \theta_3 y . \theta_1 (x+y) - \theta_2 0 . \theta x . \theta_1 y . \theta_3 (x+y),$

(41) $\theta_2 0 . \theta_3 x . \theta_1 y . \theta (x+y) = \theta_3 0 . \theta_2 x . \theta y . \theta_1 (x+y) - \theta 0 . \theta_1 x . \theta_3 y . \theta_2 (x+y),$

(42) $\theta_2 0 . \theta_1 x . \theta_3 y . \theta (x+y) = \theta_3 0 . \theta x . \theta_2 y . \theta_1 (x+y) - \theta 0 . \theta_3 x . \theta_1 y . \theta_2 (x+y).$

On peut aussi déduire les quinze dernières de ces seize équations de la première en y substituant successivement au lieu de x et y, $x + \frac{\pi}{2}$, $y + \frac{\pi}{2}$, $x + \frac{i}{2} \log q$, $y + \frac{i}{2} \log q$, $x + \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \log q$, $y + \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \log q$.

68. Si dans l'équation identique:

$$(a-b)(c-d) - (a-c)(b-d) + (b-c)(a-d) = 0$$

on substitue: $a = \frac{\theta_1^2 x}{\theta^2 x}$, $b = \frac{\theta_1^2 y}{\theta^2 y}$, $c = \frac{\theta_1^2 z}{\theta^2 z}$, $d = \frac{\theta_1^2 \omega}{\theta^2 \omega}$, et qu'on ait égard à la formule (1) du paragraphe précédent:

$$\theta_1^2 x . \theta^2 y - \theta^2 x . \theta_1^2 y = \theta^2 0 . \theta_1 (x+y) . \theta_1 (x-y),$$

on trouvera la formule remarquable:

(1) $\theta_1(x+y).\theta_1(x-y).\theta_1(z+\omega).\theta_1(z-\omega) - \theta_1(x+z).\theta_1(x-z).\theta_1(y+\omega).\theta_1(y-\omega) +$

$$+ \theta_1(y+z).\theta_1(y-z).\theta_1(x+\omega).\theta_1(x-\omega) = 0.$$

Si dans cette formule on donne aux quantités: x, y, z, et ω des accroissements tels que la somme et la différence de deux quelconques de ces accroissements soient des multiples de $\frac{\pi}{2}$, de $\frac{i}{2}\log q$, ou de $\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q$, on trouvera des formules de la même forme entre les autres θfonctions. On aura toutes les formules qui sont essentiellement différentes si l'on donne à x, y, z et ω successivement les accroissements suivants:

$$\begin{array}{llll}
\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2}, & o, & o;\\
\frac{i}{2}\log q, & \frac{i}{2}\log q, & o, & o;\\
\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q, & \frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q, & o, & o;\\
\frac{\pi}{2}, & \frac{i}{2}\log q, & \frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q, & o;\\
\frac{i}{2}\log q, & o, & o, & o;\\
\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q, & \frac{\pi}{2}, & o, & o;\\
\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q, & \frac{i}{2}\log q, & o, & o;\\
\frac{\pi}{2}, & o, & o, & o;\\
\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q, & o, & o, & o;\\
\frac{i}{2}\log q, & \frac{\pi}{2}, & o, & o;\\
\frac{\pi}{4}+\frac{i}{2}\log q, & \frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{4}.
\end{array}$$

Si l'on pose pour abréger:

$$(2)\quad \begin{cases} x+y=a, & x-y=b, & z+\omega=c, & z-\omega=d,\\ x+z=a', & x-z=b', & y+\omega=c', & y-\omega=d',\\ y+z=a'', & y-z=b'', & x+\omega=c'', & x-\omega=d'', \end{cases}$$

on aura alors les douze équations suivantes:

(3) $\theta_1 a.\theta_1 b.\theta_1 c.\theta_1 d-\theta_1 a'.\theta_1 b'.\theta_1 c'.\theta_1 d'+\theta_1 a''.\theta_1 b''.\theta_1 c''.\theta_1 d''=o,$

(4) $\theta_1 a.\theta_1 b.\theta_1 c.\theta_1 d+\theta_2 a'.\theta_2 b'.\theta_2 c'.\theta_2 d'-\theta_2 a''.\theta_2 b''.\theta_2 c''.\theta_2 d''=o,$

(5) $\theta_1 a.\theta_1 b.\theta_1 c.\theta_1 d+\theta a'.\theta b'.\theta c'.\theta d'-\theta a''.\theta b''.\theta c''.\theta d''=o,$

(6) $\theta_1 a.\theta_1 b.\theta_1 c.\theta_1 d-\theta_3 a'.\theta_3 b'.\theta_3 c'.\theta_3 d'+\theta_3 a''.\theta_3 b''.\theta_3 c''.\theta_3 d''=o,$

(7) $\theta_3 a.\theta_3 b.\theta_3 c.\theta_3 d+\theta a'.\theta b'.\theta c'.\theta d'+\theta_2 a''.\theta_2 b''.\theta_2 c''.\theta_2 d''=o,$

(8) $\theta a.\theta b.\theta_1 c.\theta_1 d-\theta a'.\theta b'.\theta_1 c'.\theta_1 d'+\theta_1 a''.\theta_1 b''.\theta c''.\theta d''=o,$

(9) $\theta a.\theta b.\theta_1 c.\theta_1 d+\theta_3 a'.\theta_3 b'.\theta_2 c'.\theta_2 d'-\theta_2 a''.\theta_2 b''.\theta_3 c''.\theta_3 d''=o,$

(10) $\theta_2 a.\theta_2 b.\theta_1 c.\theta_1 d-\theta_3 a'.\theta_3 b'.\theta c'.\theta d'+\theta a''.\theta b''.\theta_3 c''.\theta_3 d''=o,$

$$(11)\quad \theta_2 a.\theta_2 b.\theta_1 c.\theta_1 d - \theta_2 a'.\theta_2 b'.\theta_1 c'.\theta_1 d' + \theta_1 a''.\theta_1 b''.\theta_2 c''.\theta_2 d'' = o,$$

$$(12)\quad \theta_3 a.\theta_3 b.\theta_1 c.\theta_1 d - \theta_3 a'.\theta_3 b'.\theta_1 c'.\theta_1 d' + \theta_1 a''.\theta_1 b''.\theta_3 c''.\theta_3 d'' = o,$$

$$(13)\quad \theta_3 a.\theta_3 b.\theta_1 c.\theta_1 d + \theta a'.\theta b'.\theta_2 c'.\theta_2 d' - \theta_2 a''.\theta_2 b''.\theta c''.\theta d'' = o,$$

$$(14)\quad \theta_3 a.\theta b.\theta_2 c.\theta_1 d - \theta_3 a'.\theta b'.\theta_2 c'.\theta_1 d' + \theta_2 a''.\theta_1 b''.\theta_3 c''.\theta d'' = o.$$

Des équations (2) on tire:

$$(15)\quad \begin{cases} a = \dfrac{a'+b'+c'+d'}{2} = \dfrac{a''+b''+c''+d''}{2}, & b = \dfrac{a'+b'-c'-d'}{2} = -\dfrac{a''+b''-c''-d''}{2}, \\ c = \dfrac{a'-b'+c'-d'}{2} = \dfrac{a''-b''+c''-d''}{2}, & d = \dfrac{a'-b'-c'+d'}{2} = \dfrac{a''-b''-c''+d''}{2}; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} a' = \dfrac{a+b+c+d}{2} = \dfrac{a''-b''+c''+d''}{2}, & b' = \dfrac{a+b-c-d}{2} = -\dfrac{a''-b''-c''-d''}{2}, \\ c' = \dfrac{a-b+c-d}{2} = \dfrac{a''+b''-c''+d''}{2}, & d' = \dfrac{a-b-c+d}{2} = \dfrac{a''+b''-c''+d''}{2}; \end{cases}$$

$$(17)\quad \begin{cases} a'' = \dfrac{a-b+c+d}{2} = \dfrac{a'-b'+c'+d'}{2}, & b'' = \dfrac{a-b-c-d}{2} = -\dfrac{a'-b'-c'-d'}{2}, \\ c'' = \dfrac{a+b+c-d}{2} = \dfrac{a'+b'+c'-d'}{2}, & d'' = \dfrac{a+b-c+d}{2} = \dfrac{a'+b'-c'+d'}{2}, \end{cases}$$

par lesquelles formules on déterminera deux des trois groupes de quantités: (a, b, c, d), (a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d''), si l'on en connait le troisième.

De ces formules on voit qu'on peut changer en même temps les quantités:

a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d'',

en: a', b', c', d', a, b, c, d, a'',—b'', c'', d'',

ou bien en: a'', b'', c'', d'', a,—b, c, d, a',—b', c', d'.

69. Si l'on différentie par rapport à u, puis par rapport à v le logarithme de l'expression: $1-k^2\sin^2 am\,u.\sin^2 am\,v$, on trouvera:

$$d_u d_v \log(1 - k^2\sin^2 am\,u\,.\,\sin^2 am\,v) =$$

$$= -\frac{4k^2.\sin am\,u.\cos am\,u.\Delta am\,u.\sin am\,v.\cos am\,v.\Delta am\,v}{(1-k^2\sin^2 am\,u.\sin^2 am\,v)^2}.$$

Mais des formules (1) et (4) du **10** on tire en les multipliant:

$$\sin^2 am(u+v)-\sin^2 am(u-v)=\frac{4.\sin am\,u.\cos am\,u.\Delta am\,u.\sin am\,v.\cos am\,v.\Delta am\,v}{(1-k^2\sin^2 am\,u.\sin^2 am\,v)^2}.$$

Donc on a:

$$\sin^2 am(u+v)-\sin^2 am(u-v) = -\frac{1}{k^2} d_u d_v \log(1-k^2\sin^2 am\,u.\sin^2 am\,v).$$

Si l'on substitue dans le membre droit de cette équation:

$$\sin am\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_1 x}{\theta x},\quad \sin am\,v = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_1 y}{\theta y},\ \text{où pour abréger:}$$

$$\frac{\pi u}{2K} = x,\ \frac{\pi v}{2K} = y,\ \text{on aura:}$$

$$1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,v=\frac{\theta^2x.\theta^2y-\theta_1^2x.\theta_1^2y}{\theta^2x\,.\,\theta^2y},$$

et de là en vertu de la première des formules (4) du **67**:

$$1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,.\,\sin^2\mathrm{am}\,v=\theta^2o.\frac{\theta(x+y).\theta(x-y)}{\theta^2x\,.\,\theta^2y}.$$

Donc, puisque: $d_u d_v f(x,y)=d_x d_y f(x,y) d_u x\,.\,d_v y=\frac{\pi^2}{4K^2}\,.\,d_x d_y f(x,y)$, on aura:

$$\sin^2\mathrm{am}(u+v)-\sin^2\mathrm{am}(u-v)=-\frac{\pi^2}{4k^2K^2}\,d_x d_y \log\left(\frac{\theta(x+y).\theta(x-y)}{\theta^2x\,.\,\theta^2y}\right)=$$

$$=-\frac{\pi^2}{4k^2K^2}\Big\{d_x d_y\log\theta(x+y)+d_x d_y\log\theta(x-y)\Big\}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4k^2K^2}\Big\{d^2_{x-y}\log\theta(x-y)-d^2_{x+y}\log\theta(x+y)\Big\},$$

ou, si l'on pose u au lieu de u + v, v au lieu de u—v, donc x au lieu de x+y, y au lieu de x—y, et qu'on désigne par $l\theta(x)$ le logarithme de θx, et par $l'\theta x$, $l''\theta(x)$ . . . les dérivées successives de $l\theta x$ par rapport à x:

$$\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v=\frac{\pi^2}{4k^2K^2}(l''\theta y-l''\theta x).$$

Si l'on pose ici v = o, donc y = o, et qu'on substitue les valeurs du **65**:

$$k=\frac{\theta_2^2o}{\theta_3^2o},\ \frac{2K}{\pi}=\theta_3^2o,\ \text{donc:}\ \frac{\pi^2}{4k^2K^2}=\frac{1}{\theta_2^4o}\ \text{on trouvera:}$$

$$(1)\qquad \sin^2\mathrm{am}\,u=\frac{1}{\theta_2^4o}(l''\theta o-l''\theta x).$$

De là on tire de plus:

$$\cos^2\mathrm{am}\,u=1-\sin^2\mathrm{am}\,u=\frac{1}{\theta_2^4o}(\theta_2^4o-l''\theta o+l''\theta x).$$

Si l'on pose ici u = K, on aura: $\cos\mathrm{am}\,u=o$, $x=\frac{\pi}{2}$, $\theta x=\theta(\frac{\pi}{2})=\theta_3 o$; donc:

$$o=\theta_2^4o-l''\theta o+l''\theta_3 o,\ \theta_2^4o-l''\theta o=-l''\theta_3 o,\ \text{et:}$$

$$(2)\qquad \cos^2\mathrm{am}\,u=\frac{1}{\theta_2^4o}(l''\theta x-l''\theta_3 o).$$

De même on a:

$$\Delta^2\mathrm{am}\,u=1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u=\frac{1}{\theta_3^4o}(\theta_3^4o-l''\theta o+l''\theta x).$$

Si l'on pose ici u = K+iK', on aura: $\Delta\,\mathrm{am}\,u=o$, $x=\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\log q$,

$\theta x=\theta(\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\log q)=\frac{i}{\sqrt{q}}\,\theta_2 o$; donc:

$$o=\theta_3^4o-l''\theta o+l''\theta_2 o,\ \theta_3^4o-l''\theta o=-l''\theta_2 o,\ \text{et:}$$

$$(3)\qquad \Delta^2\mathrm{am}\,u=\frac{1}{\theta_3^4o}(l''\theta x-l''\theta_2 o).$$

Si dans ces trois équations on pose successivement u+K, u+K+iK', u + iK' au lieu de u, donc: $x+\frac{\pi}{2}$, $x+\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\log q$, et $x-\frac{i}{2}\log q$ au lieu de x, on trouvera en ayant égard aux formules (1), (4) et (5) du **22** et (1), (3), (5) du **63**:

(4) $$\frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\theta_2^4 0}\,(l''\theta 0 - l''\theta_3 x),$$

(5) $$\frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{\theta_3^4 0}{\theta^4 0 \,.\, \theta_2^4 0}\,(l''\theta_3 x - l''\theta_3 0),$$

(6) $$\frac{1}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\theta^4 0}\,(l''\theta_3 x - l''\theta_2 0),$$

(7) $$\frac{\Delta^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\theta_3^4 0}\,(l''\theta 0 - l''\theta_2 x),$$

(8) $$\frac{1}{\cos^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\theta^4 0}\,(l''\theta_3 0 - l''\theta_2 x),$$

(9) $$\frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\theta^4 0}\,(l''\theta_2 0 - l''\theta_2 x),$$

(10) $$\frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\theta_3^4 0}\,(l''\theta 0 - l''\theta_1 x),$$

(11) $$\frac{\Delta^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\theta_3^4 0}\,(l''\theta_3 0 - l''\theta_1 x),$$

(12) $$\frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\theta_3^4 0}\,(l''\theta_2 0 - l''\theta_1 x).$$

70. Cherchons maintenant les développements en séries convergentes de $l''\theta x$, $l''\theta_1 x$, $l''\theta_2 x$, $l''\theta_3 x$. Des formules du **62** on trouve:

$$l\theta x = \sum_1^\infty{}_m \log(1 - 2q^{2m-1}.\cos 2x + q^{2(2m-1)}) + \sum_1^\infty{}_m \log(1 - q^{2m}),$$

$$l\theta_1 x = \log(2\sqrt[4]{q}) + \log\sin x + \sum_1^\infty{}_m \log(1 - 2q^{2m}.\cos 2x + q^{4m}) + \sum_1^\infty{}_m \log(1 - q^{2m}),$$

$$l\theta_2 x = \log(2\sqrt[4]{q}) + \log\cos x + \sum_1^\infty{}_m \log(1 + 2q^{2m}.\cos 2x + q^{4m}) + \sum_1^\infty{}_m \log(1 - q^{2m}),$$

$$l\theta_3 x = \sum_1^\infty{}_m \log(1 + 2q^{2m-1}.\cos 2x + q^{2(2m-1)}) + \sum_1^\infty{}_m \log(1 - q^{2m}).$$

En y substituant les valeurs du **49**:

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1 - 2q^{2m-1}.\cos 2x + q^{2(2m-1)}) = -2.\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}.\frac{q^n}{1-q^{2n}}.\cos 2nx,$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1 - 2q^{2m}.\cos 2x + q^{4m}) = -2.\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}.\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}.\cos 2nx,$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1 + 2q^{2m}.\cos 2x + q^{4m}) = -2.\sum_1^\infty{}_n (-1)^n.\frac{1}{n}.\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}.\cos 2nx,$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1 + 2q^{2m-1}.\cos 2x + q^{2(2m-1)}) = -2.\sum_1^\infty{}_n (-1)^n.\frac{1}{n}.\frac{q^n}{1-q^{2n}}.\cos 2nx,$$

$$\sum_1^\infty{}_n \log(1 - q^{2m}) = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}.\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

on trouvera:

(1) $$l\theta x = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}.\frac{q^n}{1-q^{2n}}\,(q^n + 2\cos 2nx),$$

(2) $$l\theta_1 x = \log(2\sqrt[4]{q}) + \log\sin x - \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}.\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\,(1 + 2\cos 2nx),$$

(3) $$l\theta_2 x = \log(2\sqrt[4]{q}) + \log\cos x - \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n} \cdot \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(1+(-1)^n.2\cos 2nx),$$

(4) $$l\theta_3 x = -\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n} \cdot \frac{q^n}{1-q^{2n}}(q^n+(-1)^n.\ 2\cos 2nx).$$

De là on trouve de plus en différentiant par rapport à x:

(5) $$l'\theta x = 4.\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1-q^{2n}} . \sin 2nx,$$

(6) $$l'\theta_1 x = \frac{\cos x}{\sin x} + 4.\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} . \sin 2nx,$$

(7) $$l'\theta_2 x = -\frac{\sin x}{\cos x} + 4 . \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} . \sin 2nx,$$

(8) $$l'\theta_3 x = 4.\sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{q^n}{1-q^{2n}} . \sin 2nx,$$

(9) $$l''\theta x = 8 . \sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} . \cos 2nx,$$

(10) $$l''\theta_1 x = -\frac{1}{\sin^2 x} + 8.\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} . \cos 2nx,$$

(11) $$l''\theta_2 x = -\frac{1}{\cos^2 x} + 8 . \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} . \cos 2nx,$$

(12) $$l''\theta_3 x = 8 . \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{nq^n}{1-q^{2n}} . \cos 2nx.$$

Si dans les équations (9), (11) et (12) on pose x = o, on trouvera:

(13) $$l''\theta o = 8 . \sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}},$$

(14) $$l''\theta_2 o = -1 + 8 . \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}},$$

(15) $$l''\theta_3 o = 8 . \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{nq^n}{1-q^{2n}}.$$

En substituant ces valeurs, ainsi que $x = \frac{\pi u}{2K}$ dans les formules du paragraphe précédent, on trouve enfin:

(16) $$\sin^2 \mathrm{am}\, u = \frac{8}{\theta_2^4 o} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \left(1-\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right),$$

(17) $$\cos^2 \mathrm{am}\, u = -\frac{8}{\theta_2^4 o} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \left(1-(-1)^n . \cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right),$$

(18) $$\Delta^2 \mathrm{am}\, u = \frac{1}{\theta_3^4 o}\left\{1-8.\sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(q^n-(-1)^n . \cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

(19) $$\frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{8}{\theta_2^4 o} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(1-(-1)^n . \cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right),$$

(20) $$\frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = -\frac{8\theta_3^4 o}{\theta^4 o \,.\, \theta_2^4 o} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right),$$

(21) $$\frac{1}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\theta^4 o} \cdot \left\{1-8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(q^n-\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

$$(22)\quad \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{\theta_3^4 o}\cdot\left\{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8\cdot\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(1-(-1)^n\cdot q^n\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\}$$

$$(23)\quad \frac{1}{\cos^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{\theta_4^4 o}\cdot\left\{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8\cdot\sum_1^\infty{}_n (-1)^n\cdot\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(1-q^n\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

$$(24)\quad \frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{\theta_4^4 o}\cdot\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8\cdot\sum_1^\infty{}_n (-1)^n\cdot\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

$$(25)\quad \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{\theta_3^4 o}\cdot\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8\cdot\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(1-q^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

$$(26)\quad \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{\theta_3^4 o}\cdot\left\{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8\cdot\sum_1^\infty{}_n (-1)^n\cdot\frac{nq^n}{1-q^{2n}}\left(1-(-1)^n\cdot q^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

$$(27)\quad \frac{\cos^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{\theta_3^4 o}\cdot\left\{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8\cdot\sum_1^\infty{}_n (-1)^n\cdot\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\left(1-(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

$$(28)\quad \frac{\cos^2 \operatorname{am} u\,\Delta^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} u} = \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} u} - \Delta^2 \operatorname{am} u =$$

$$= \frac{1}{\theta_3^4 o}\cdot\left\{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8\cdot\sum_1^\infty{}_n (-1)^n\cdot\frac{nq^n}{1-q^n}\left(1-(-1)^n\cdot\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

$$(29)\quad \frac{\sin^2 \operatorname{am} u\,.\,\Delta^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am} u} = \frac{\Delta^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am} u} - \Delta^2 \operatorname{am} u =$$

$$= \frac{1}{\theta_3^4 o}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8\cdot\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-(-1)^n q^n}\left(1-\cos\frac{n\pi u}{K}\right)\right\},$$

$$(30)\quad \frac{\sin^2 \operatorname{am} u\,.\,\cos^2 \operatorname{am} u}{\Delta^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\cos^2 \operatorname{am} u}{\Delta^2 \operatorname{am} u} - \cos^2 \operatorname{am} u\right) =$$

$$= 32\cdot\frac{\theta_3^4 o}{\theta_2^8 o}\cdot\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^{2n}}{1-q^{4n}}\left(1-\cos\frac{2n\pi u}{K}\right),$$

$$(31)\quad \frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\cos^2 \operatorname{am} u\,.\,\Delta^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{1}{\cos^2 \operatorname{am} u} - \frac{1}{\Delta^2 \operatorname{am} u}\right) =$$

$$= \frac{\theta_3^4 o}{\theta^8 o}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8\cdot\sum_1^\infty{}_n (-1)^n\cdot\frac{nq^n}{1-q^n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

$$(32)\quad \frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} - \frac{k'^2}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} =$$

$$= \frac{1}{\theta_3^4 o}\left\{ \frac{\cos^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)} + 8 \,.\, \sum_1^\infty{}_n \frac{n q^n}{1-(-1)^n q^n}\left(1-(-1)^n \,.\, \cos\left(\frac{n\pi u}{K}\right)\right)\right\},$$

$$(33)\quad \frac{\Delta^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \cos^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{k'^2}{\cos^2 \mathrm{am}\, u} + \frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} =$$

$$= \frac{4}{\theta_3^4 o}\left\{ \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{K}\right)} + 8 \,.\, \sum_1^\infty{}_n \frac{n q^{2n}}{1-q^{4n}}\left(1 - q^{2n} \,.\, \cos\left(\frac{2n\pi u}{K}\right)\right)\right\}.$$

71. On peut développer des formules semblables aux formules du paragraphe précédent exprimées par le nome complémentaire p au lieu du nome q. On trouvera ces formules facilement de la même manière que les formules précédentes, ou bien on les trouvera à l'aide des formules (8) du **63**, desquelles on tire en substituant $\frac{x}{i}$ au lieu de x:

$$(1)\quad \begin{cases} \theta\,(x,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}} \,.\, e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}} \,.\, \theta_2\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ \theta_1(x,q) = i\sqrt{\frac{K}{K'}} \,.\, e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}} \,.\, \theta_1\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ \theta_2(x,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}} \,.\, e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}} \,.\, \theta\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ \theta_3(x,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}} \,.\, e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}} \,.\, \theta_3\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right). \end{cases}$$

De là on tire:

$$(2)\quad \begin{cases} l\theta\, x = \frac{1}{2} l\left(\frac{K}{K'}\right) - \frac{Kx^2}{\pi K'} + l\theta_2\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ l\theta_1 x = +li\tfrac{1}{2} l\left(\frac{K}{K'}\right) - \frac{Kx^2}{\pi K'} + l\theta_1\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ l\theta_2 x = \frac{1}{2} l\left(\frac{K}{K'}\right) - \frac{Kx^2}{\pi K'} + l\theta\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ l\theta_3 x = \frac{1}{2} l\left(\frac{K}{K'}\right) - \frac{Kx^2}{\pi K'} + l\theta_3\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right). \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} l'\theta\, x = -\frac{2Kx}{\pi K'} + \frac{K}{iK'} \,.\, l'\theta_2\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ l'\theta_1 x = -\frac{2Kx}{\pi K'} + \frac{K}{iK'} \,.\, l'\theta_1\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ l'\theta_2 x = -\frac{2Kx}{\pi K'} + \frac{K}{iK'} \,.\, l'\theta\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ l'\theta_3 x = -\frac{2Kx}{\pi K'} + \frac{K}{iK'} \,.\, l'\theta_3\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right). \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} l''\theta\, x = -\dfrac{2K}{\pi K'} - \left(\dfrac{K}{K'}\right)^2 . l''\theta_2\left(\dfrac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ l''\theta_1 x = -\dfrac{2K}{\pi K'} - \left(\dfrac{K}{K'}\right)^2 . l''\theta_1\left(\dfrac{Kx}{iK'},\ p\right), \\ l''\theta_2 x = -\dfrac{2K}{\pi K'} - \left(\dfrac{K}{K'}\right)^2 . l''\,\theta\left(\dfrac{Kx}{iK'},\ p\right). \\ l''\theta_3 x = -\dfrac{2K}{\pi K'} - \left(\dfrac{K}{K'}\right)^2 . l''\theta_3\left(\dfrac{Kx}{iK'},\ p\right), \end{cases}$$

où $\dfrac{K}{K'} = -\dfrac{\log p}{\pi}$.

De même on trouvera des formules correspondantes aux formules (16)—(33) du paragraphe précédent à l'aide des formules du **19**. En substituant dans les formules (16)—(33) du paragraphe précédent iu au lieu de u et k' au lieu de k, donc p au lieu de q, K' au lieu de K, on trouvera alors:

$$(5)\quad \sin^2 \mathrm{am}\, u = -\frac{\sin^2 \mathrm{am}(iu,k')}{\cos^2 \mathrm{am}(iu,k')} = \frac{1}{\theta^4(o,p)} \cdot \left\{ \left(\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \right)^2 + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{np^{2n}}{1-p^{2n}} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2 \right\},$$

$$(6)\quad \cos^2 \mathrm{am}\, u = \frac{1}{\cos^2 \mathrm{am}(iu,k')} = \frac{1}{\theta^4(o,p)} \left\{ \frac{4e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{\left(1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)^2} + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(1 - \frac{p^n}{2} \left(e^{\frac{n\pi u}{K'}} + e^{-\frac{n\pi u}{K'}} \right) \right) \right\},$$

$$(7)\quad \Delta^2 \mathrm{am}\, u = \frac{\Delta^2 \mathrm{am}\,(iu,k')}{\cos^2 \mathrm{am}(iu,k')} = \frac{1}{\theta_3^4(o,p)} \left\{ \frac{4e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{\left(1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)^2} + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(1 - (-1)^n \cdot \frac{p^n}{2} \left(e^{\frac{n\pi u}{K'}} + e^{-\frac{n\pi u}{K'}} \right) \right) \right\},$$

$$(8)\quad \frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{1}{\Delta^2 \mathrm{am}\,(iu,k')} = \frac{1}{\theta^4(o,p)} \left\{ 1 - 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(p^n - \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{n\pi u}{K'}} + e^{-\frac{n\pi u}{K'}} \right) \right) \right\},$$

$$(9)\quad \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = -\frac{\sin^2 \mathrm{am}(iu,k')}{\Delta^2 \mathrm{am}(iu,k')} = -\frac{4\theta_3^4(o,p)}{\theta^4(o,p).\theta_2^4(o,p)} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2,$$

$$(10)\quad \frac{1}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = \frac{\cos^2 \mathrm{am}(iu,k')}{\Delta^2 \mathrm{am}\,(iu,k')} = -\frac{4}{\theta_2^4(o,p)} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - (-1)^n e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2,$$

$$(11)\quad \frac{\Delta^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}\, u} = \Delta^2 \mathrm{am}\,(iu,k') = \frac{1}{\theta_3^4(o,p)} \cdot \left\{ 1 - 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(p^n - (-1)^n \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{n\pi u}{K'}} + e^{-\frac{n\pi u}{K'}} \right) \right) \right\}$$

$$(12)\quad \frac{1}{\cos^2 \mathrm{am}\, u} = \cos^2 \mathrm{am}(iu,k') = \frac{4}{\theta_2^4(o,p)} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - (-1)^n . e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2,$$

$$(13)\quad \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}\, u} = -\sin^2 \mathrm{am}(iu,k') = \frac{4}{\theta_2^4(o,p)} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2,$$

$$(14)\quad \frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} - \frac{\cos^2 \mathrm{am}(iu,k')}{\sin^2 \mathrm{am}(iu,k')} =$$

$$= \frac{1}{\theta_3^4(o,p)} \left\{ \left(\frac{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \right)^2 + 4 \sum_1^\infty{}_n \frac{np^{2n}}{1-p^{2n}} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - (-1)^n . e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2 \right\},$$

$$(15)\quad \frac{\Delta^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} = - \frac{\Delta^2 \mathrm{am}(iu,k')}{\sin^2 \mathrm{am}(iu,k')} =$$

$$= \frac{1}{\theta_3^4(o,p)} \cdot \left\{ \frac{4e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{\left(1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)^2} - 8 \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(1 - (-1)^n . \frac{p^n}{2} \left(e^{\frac{n\pi u}{K'}} + e^{-\frac{n\pi u}{K'}} \right) \right) \right\},$$

$$(16)\quad \frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} = - \frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}(iu,k')} =$$

$$= \frac{1}{\theta_3^4(o,p)} \cdot \left\{ \frac{4e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{\left(1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)^2} - 8 \sum_1^\infty{}_n \frac{np^n}{1-p^{2n}} \left(1 - \frac{p^n}{2} \left(e^{\frac{n\pi u}{K'}} + e^{-\frac{n\pi u}{K'}} \right) \right) \right\},$$

$$(17)\quad \frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u} = - \frac{\Delta^2 \mathrm{am}(iu,k')}{\sin^2 \mathrm{am}(iu,k') \,.\, \cos^2 \mathrm{am}(iu,k')} =$$

$$= \frac{16}{\theta_3^4(o,p)} \left\{ \frac{e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{\left(1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}\right)^2} - 2 \sum_1^\infty{}_n \frac{np^{2n}}{1-p^{2n}} \left(1 - \frac{p^{2n}}{2} \left(e^{\frac{2n\pi u}{K'}} + e^{-\frac{2n\pi u}{K'}} \right) \right) \right\},$$

$$(18)\quad \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}\, u} = - \frac{\sin^2 \mathrm{am}(iu,k') \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}(iu,k')}{\cos^2 \mathrm{am}(iu,k')} =$$

$$= \frac{1}{\theta_3^4(o,p)} \left\{ \left(\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \right)^2 + 4 \sum_1^\infty{}_n \frac{np^n}{1-(-1)^n p^n} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2 \right\},$$

$$(19)\quad \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \cos^2 \mathrm{am}\, u}{\Delta^2 \mathrm{am}\, u} = - \frac{\sin^2 \mathrm{am}(iu,k')}{\cos^2 \mathrm{am}(iu,k') \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}(iu,k')} =$$

$$= \frac{\theta_3^4(o,p)}{\theta^8(o,p)} \left\{ \left(\frac{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \right)^2 + 4 \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{np^n}{1-p^n} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2 \right\},$$

$$(20)\quad \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, u}{\cos^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}\, u} = -\frac{\sin^2 \mathrm{am}\,(iu,k') \,.\, \cos^2 \mathrm{am}\,(iu,k')}{\Delta^2 \mathrm{am}\,(iu,k')} =$$

$$= 16 \,.\, \frac{\theta_3^4(o,p)}{\theta_2^4(o,p)} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{n p^{2n}}{1-p^{4n}} \left(e^{\frac{n\pi u}{K'}} - e^{-\frac{n\pi u}{K'}} \right)^2,$$

$$(21)\quad \frac{\cos^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}\, u} = -\frac{\cos^2 \mathrm{am}\,(iu,k')}{\sin^2 \mathrm{am}\,(iu,k') \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}\,(iu,k')} =$$

$$= \frac{1}{\theta_3^4(o,p)} \left\{ \left(\frac{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \right)^2 + 4 \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \,.\, \frac{n p^n}{1-(-1)^n p^n} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - (-1)^n e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2 \right\},$$

$$(22)\quad \frac{\Delta^2 \mathrm{am}\, u}{\sin^2 \mathrm{am}\, u \,.\, \cos^2 \mathrm{am}\, u} = -\frac{\cos^2 \mathrm{am}\,(iu,k') \,.\, \Delta^2 \mathrm{am}\,(iu,k')}{\sin^2 \mathrm{am}\,(iu,k')} =$$

$$= \frac{1}{\theta_3^4(o,p)} \left\{ \left(\frac{1+e^{-\frac{\pi u}{K'}}}{1-e^{-\frac{\pi u}{K'}}} \right)^2 + 4 \sum_1^\infty{}_n \frac{n p^n}{1-p^n} \left(e^{\frac{n\pi u}{2K'}} - (-1)^n \,.\, e^{-\frac{n\pi u}{2K'}} \right)^2 \right\}.$$

72. Si l'on différentie par rapport au nome q les θfonctions:

$$\theta x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m q^{m^2} \,.\, \cos 2mx,$$

$$\theta_1 x = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} \,.\, \sin(2m-1)x,$$

$$\theta_2 x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} \,.\, \cos(2m-1)x,$$

$$\theta_3 x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{m^2} \,.\, \cos 2mx,$$

on trouvera:

$$\mathrm{d}_q \theta x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \,.\, m^2 \,.\, q^{m^2-1} \,.\, \cos 2mx,$$

$$\mathrm{d}_q \theta_1 x = -\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \,.\, \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \,.\, q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 - 1} \,.\, \sin(2m-1)x,$$

$$\mathrm{d}_q \theta_2 x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \,.\, q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 - 1} \,.\, \cos(2m-1)x,$$

$$\mathrm{d}_q \theta_3 x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m m^2 \,.\, q^{m^2-1} \,.\, \cos 2mx.$$

Si l'on différentie les mêmes fonctions deux fois de suite par rapport à x on trouvera:

$$\mathrm{d}_x^2 \theta x = \theta'' x = -4 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \,.\, m^2 q^{m^2} \,.\, \cos 2mx,$$

$$\mathrm{d}_x^2 \theta_1 x = \theta_1'' x = 4 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m (-1)^m \,.\, \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 \,.\, q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} \,.\, \sin(2m-1)x,$$

$$d_x^2\theta_2 x = \theta_2''x = -4\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2 . q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . \cos(2m-1)x,$$

$$d_x^2\theta_3 x = \theta_3''x = -4\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, m^2 . q^{m^2} . \cos 2mx.$$

En comparant ces équations on trouve pour une quelconque des θfonctions la relation suivante entre ses dérivées par rapport à x et par rapport à q:

$$(1) \qquad d_x^2\theta x = \theta''x = -4q . d_q\theta x.$$

Si l'on cherche les dérivées successives par rapport à x du logarithme d'une quelconque des θfonctions on trouve:

$$d_x l\theta x = \frac{d_x\theta x}{\theta x}, \text{ ou: } l'\theta x = \frac{\theta' x}{\theta x},$$

$$d_x^2 l\theta x = \frac{d_x^2\theta x}{\theta x} - \left(\frac{d_x\theta x}{\theta x}\right)^2, \text{ ou: } l''\theta x = \frac{\theta''x}{\theta x} - (l'\theta x)^2,$$

et en substituant la valeur de $\theta''x$ de l'équation (1):

$$l''\theta x = -4q . \frac{d_q\theta x}{\theta x} - (l'\theta x)^2.$$

Mais: $d_q l\theta x = \frac{d_q\theta x}{\theta x}$; donc enfin on a:

$$l''\theta x = -4q . d_q l\theta x - (l'\theta x)^2, \text{ ou:}$$

$$(2) \qquad (l'\theta x)^2 = -4q . d_q l\theta x - l''\theta x,$$

équation qui a lieu pour une quelconque des θfonctions.

Si l'on différentie maintenant par rapport à q les formules (1), (2), (3) et (4) du **70**, et puis qu'on multiplie par q, on trouvera:

$$q . d_q l\theta x = -2\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{(1-q^{2n})^2}(q^n + (1+q^{2n})\cos 2nx),$$

$$q . d_q l\theta_1 x = \tfrac{1}{4} - 2\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}(1+2\cos 2nx),$$

$$q . d_q l\theta_2 x = \tfrac{1}{4} - 2\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}(1+(-1)^n . 2\cos 2nx),$$

$$q . d_q l\theta_3 x = -2\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{(1-q^{2n})^2}(q^n + (-1)^n(1+q^{2n}) . \cos 2nx).$$

Si l'on substitue ces valeurs et les valeurs de $l''\theta x$, $l''\theta_1 x$, $l''\theta_2 x$, $l''\theta_3 x$ des formules (9), (10), (11), et (12) du **70** dans l'équation (2) on trouve:

$$(l'\theta x)^2 = 8\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{(1-q^{2n})^2}(q^n - (n(1-q^{2n}) - (1+q^{2n})) . \cos 2nx),$$

$$(l'\theta_1 x)^2 = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}(1-(n(1-q^{2n}) - 2) . \cos 2nx),$$

$$(l'\theta_2 x)^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}(1-(-1)^n(n(1-q^{2n}) - 2).\cos 2nx),$$

$$(l'\theta_3 x)^2 = 8 \sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{(1-q^{2n})^2}(q^n - (-1)^n(n(1-q^{2n}) - (1+q^{2n})) \cdot \cos 2nx).$$

On peut réduire ces formules en remarquant qu'en vertu des formules (5), (6), (7) et (8) du **70** on doit avoir pour $x = o$:

$$l'\theta x = o,\ (l'\theta_1 x)^2 - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 16 \sum_1^\infty{}_n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}},\ l'\theta_2 x = o,\ l'\theta_3 x = o.$$

En substituant ces valeurs et $x = o$ dans les formules précédentes on trouve:

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{(1-q^{2n})^2}(q^n - (n(1-q^{2n}) - (1+q^{2n}))) = o,$$

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}(1 - (n(1-q^{2n}) - 2)) = 2\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}},$$

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}(1 - (-1)^n(n(1-q^{2n}) - 2)) = o,$$

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{(1-q^{2n})^2}(q^n - (-1)^n(n(1-q^{2n}) - (1+q^{2n}))) = o,$$

et de là en substituant de plus: $\cos 2nx = 1 - 2\sin^2 nx$:

(3) $$(l'\theta x)^2 = 16 \sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{(1-q^{2n})^2}(n(1-q^{2n}) - (1+q^{2n})) \cdot \sin^2 nx,$$

(4) $$(l'\theta_1 x)^2 = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 16 \sum_1^\infty{}_n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} + 16 \sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}(n(1-q^{2n}) - 2) \cdot \sin^2 nx,$$

(5) $$(l'\theta_2 x)^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 16 \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}(n(1-q^{2n}) - 2) \cdot \sin^2 nx,$$

(6) $$(l'\theta_3 x)^2 = 16 \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^n}{(1-q^{2n})^2}(n(1-q^{2n}) - (1+q^{2n})) \cdot \sin^2 nx.$$

73. Nous développerons maintenant en séries infinies les réciproques des fonctions: $\frac{1}{\theta x}, \frac{1}{\theta_1 x}, \frac{1}{\theta_2 x}, \frac{1}{\theta_3 x}$. Considérons la première de ces fonctions:

$$\frac{1}{\theta x} = \frac{1}{\prod_1^\infty{}_m (1 - 2q^{2m-1} \cdot \cos 2x + q^{2(2m-1)}) \cdot (1-q^{2m})}.$$

En vertu des règles générales pour la décomposition d'une fonction fractionaire de $\cos 2x$ on a:

$$\frac{1}{\theta x} = \sum_1^\infty{}_m \frac{A_m}{1 - 2q^{2m-1} \cdot \cos 2x + q^{2(2m-1)}},$$

où A_m est une fonction de q et m égale à la limite de:

$$\frac{1 - 2q^{2m-1} \cdot \cos 2x + q^{2(2m-1)}}{\theta x}$$

pour la valeur: $\cos 2x = \frac{1+q^{2(2m-1)}}{2q^{2m-1}}$. Or on a alors: $x = n\pi \pm \frac{2m-1}{2} i \log q$,

où n désigne un nombre entier quelconque. Donc si l'on pose pour abréger:

$$n\pi \pm \frac{2m-1}{2} . i \log q = a, \text{ on aura:}$$

$$A_m = \lim_{x=a} \left(\frac{1-2q^{2m-1}. \cos 2x + q^{2(2m-1)}}{\theta x}\right) = \frac{4q^{2m-1}. \sin 2a}{\theta' a}.$$

Mais on a:

$4q^{2m-1}. \sin 2a = \pm 4q^{2m-1}. \sin((2m-1) i \log q) = \mp 2i(1 - q^{2(2m-1)})$ et en vertu des formules (6) et (3) du **63**:

$$\theta(x+a) = \theta(x + n\pi \pm mi \log q \mp \tfrac{i}{2} \log q) =$$

$$= (-1)^m . q^{-m^2} . e^{\pm 2mi(x \mp \frac{i}{2} \log q)} . \theta(x \mp \tfrac{i}{2} \log q =$$

$$= (-1)^m . q^{-m^2+m} . e^{\pm 2mix} . \theta(x \mp \tfrac{i}{2} \log q) = \pm (-1)^m . i . q^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . e^{\pm (2m-1)ix} . \theta_1 x,$$

donc puisque $\theta_1 o = o$:

$$\theta'(a) = \pm (-1)^m . i . q^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . \theta_1' o.$$

Donc enfin on aura:

$$A_m = -(-1)^m . \frac{2q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}(1 - q^{2(2m-1)})}{\theta_1' o},$$

$$(1) \quad \frac{1}{\theta x} = -\frac{2}{\theta_1' o} . \sum_1^\infty{}_m (-1)^m \frac{q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . (1 - q^{2(2m-1)})}{1 - 2q^{2m-1}. \cos 2x + q^{2(2m-1)}}.$$

De même on a:

$$\frac{\sin x}{\theta_1 x} = \frac{1}{2\sqrt[4]{q} . \prod_1^\infty{}_m (1 - 2q^{2m}. \cos 2x + q^{4m}) . (1 - q^{2m})} = \sum_1^\infty{}_m \frac{B_m}{1 - 2q^{2m}. \cos 2x + q^{4m}}$$

où B_m est la limite de: $\frac{\sin x (1 - 2q^{2m}. \cos 2x + q^{4m})}{\theta_1 x}$ pour la valeur:

$\cos 2x = \frac{1+q^{4m}}{2q^{2m}}$. Or on a alors: $x = n\pi \pm mi \log q$, où n est un nombre entier quelconque. Donc si l'on pose pour abréger: $n\pi \pm mi \log q = b$, on aura:

$$B_m = \lim_{x=b} \left(\frac{\sin x . (1 - 2q^{2m}. \cos 2x + q^{4m})}{\theta_1 x}\right) = \frac{4q^{2m}. \sin 2b . \sin b}{\theta_1' b}.$$

Mais on a: $4q^{2m} . \sin 2b = \pm 4q^{2m} . \sin(2mi \log q) = \mp 2i(1 - q^{4m})$, $\sin b = \mp (-1)^n . \frac{i}{2} . \frac{1 - q^{2m}}{q^m}$; donc:

$$4q^{2m}. \sin 2b . \sin b = -(-1)^n . \frac{(1-q^{2m})(1-q^{4m})}{q^m}.$$

De plus on a en vertu des formules (6) du **63**:

$\theta_1(x+b) = (-1)^{n+m} . q^{-m^2} . e^{\pm 2mix} . \theta_1 x$, donc: $\theta_1' b = (-1)^{n+m} . q^{-m^2} . \theta_1' o$.

Donc enfin on aura:

$$(2) \quad \frac{1}{\theta_1 x} = -\frac{1}{\theta_1' o} . \frac{1}{\sin x} . \sum_1^\infty{}_m (-1)^m . \frac{q^{m^2-m}(1-q^{2m})(1-q^{4m})}{1 - 2q^{2m}. \cos 2x + q^{4m}}.$$

On peut mettre le membre droit de cette équation sous une autre forme en remarquant que:

$$(1-q^{2m})(1-q^{4m}) = (1-q^{2m})^2(1+q^{2m}) = (1-2q^{2m}+q^{4m})(1+q^{2m}) =$$
$$= (1-2q^{2m}.\cos 2x + q^{4m} - 4q^{2m}.\sin^2 x)(1+q^{2m}) =$$
$$= (1-2q^{2m}.\cos 2x + q^{4m})(1+q^{2m}) - 4q^{2m}(1+q^{2m}).\sin^2 x.$$

En substituant cette expression on trouvera:

$$\frac{1}{\theta_1 x} = -\frac{1}{\theta'_1 o}\cdot\frac{1}{\sin x}.\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.q^{m^2-m}(1+q^{2m}) + \frac{4}{\theta'_1 o}.\sin x.\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{q^{m^2+m}(1+q^{2m})}{1-2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}},$$

ou puisque: $\sum_1^\infty{}_m(-1)^m q^{m^2-m}(1+q^{2m}) = \sum_1^\infty{}_m(-1)^m.q^{m^2-m} + \sum_1^\infty{}_m(-1)^m q^{m^2+m}$,

et: $\sum_1^\infty{}_m(-1)^m q^{m^2-m} = -1 + \sum_2^\infty{}_m(-1)^m.q^{m^2-m} = -1 - \sum_1^\infty{}_m(-1)^m q^{(m+1)^2-(m+1)} =$

$= -1 - \sum_1^\infty{}_m(-1)^m q^{m^2+m}$, donc: $\sum_1^\infty{}_m(-1)^m q^{m^2-m}(1+q^{2m}) = -1$, et:

$$(3)\quad \frac{1}{\theta_1 x} = \frac{1}{\theta_1 'o}\cdot\frac{1}{\sin x} + \frac{4}{\theta_1 'o}\cdot\sin x.\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{q^{m^2+m}(1+q^{2m})}{1-2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}}.$$

Si dans les formules (2), (3) et (1) on pose $x + \frac{\pi}{2}$ au lieu de x on trouvera:

$$(4)\quad \frac{1}{\theta_2 x} = -\frac{1}{\theta_1 'o}\cdot\frac{1}{\cos x}.\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{q^{m^2-m}(1-q^{2m})(1-q^{4m})}{1+2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}} =$$
$$= \frac{1}{\theta_1 'o}\cdot\frac{1}{\cos x} + \frac{4}{\theta_1 'o}.\cos x.\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{q^{m^2+m}(1+q^{2m})}{1+2q^{2m}.\cos 2x+q^{4m}}.$$

$$(5)\quad \frac{1}{\theta_3 x} = -\frac{2}{\theta_1 'o}.\sum_1^\infty{}_m(-1)^m.\frac{q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}.(1-q^{2(2m-1)})}{1+2q^{2m-1}.\cos 2x+q^{(2m-1)^2}}.$$

On peut transformer ces formules en fonctions de p au lieu de q à l'aide des formules (1) du **71**:

$$\frac{1}{\theta x} = \sqrt{\frac{K'}{K}}.e^{\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\frac{1}{\theta_2\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right)},$$

$$\frac{1}{\theta_1 x} = -i\sqrt{\frac{K'}{K}}.e^{\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\frac{1}{\theta_1\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right)},$$

$$\frac{1}{\theta_2 x} = \sqrt{\frac{K'}{K}}.e^{\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\frac{1}{\theta\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right)},$$

$$\frac{1}{\theta_3 x} = \sqrt{\frac{K'}{K}}.e^{\frac{Kx^2}{\pi K'}}.\frac{1}{\theta_3\left(\frac{Kx}{iK'},\ p\right)}.$$

On trouvera de là:

$$(6)\quad \frac{1}{\theta x} = -\sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\, p^{-(\frac{x}{\pi})^2} \frac{1}{\theta_1'(o,p)} \cdot \frac{2p^{\frac{x}{\pi}}}{1+p^{\frac{2x}{\pi}}} \cdot \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{p^{n^2-n}(1-p^{2n})(1-p^{4n})}{(1+p^{2(n-\frac{x}{\pi})})(1+p^{2(n+\frac{x}{\pi})})} =$$

$$= \sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\, p^{-(\frac{x}{\pi})^2} \left\{ \frac{1}{\theta_1'(o,p)} \cdot \frac{2p^{\frac{x}{\pi}}}{1+p^{\frac{2x}{\pi}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\theta_1'(o,p)} \cdot \frac{1+p^{\frac{2x}{\pi}}}{p^{\frac{x}{\pi}}} \cdot \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{p^{n^2+n}(1+p^{2n})}{(1+p^{2(n-\frac{x}{\pi})})(1+p^{2(n+\frac{x}{\pi})})} \right\},$$

$$(7)\quad \frac{1}{\theta_1 x} = \sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\, p^{-(\frac{x}{\pi})^2} \left\{ \frac{1}{\theta_1'(o,p)} \cdot \frac{2p^{\frac{x}{\pi}}}{1-p^{\frac{2x}{\pi}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\theta_1'(o,p)} \cdot \frac{1-p^{\frac{2x}{\pi}}}{p^{\frac{x}{\pi}}} \cdot \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{p^{n^2+n}(1+p^{2n})}{(1-p^{2(n-\frac{x}{\pi})})(1-p^{2(n+\frac{x}{\pi})})} \right\},$$

$$(8)\quad \frac{1}{\theta_2 x} = -\sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\, p^{-(\frac{x}{\pi})^2} \frac{2}{\theta_1'(o,p)} \cdot \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{p^{(\frac{2n-1}{2})^2}(1-p^{2(2n-1)})}{(1-p^{2(\frac{2n-1}{2}-\frac{x}{\pi})})(1-p^{2(\frac{2n-1}{2}+\frac{x}{\pi})})}$$

$$(9)\quad \frac{1}{\theta_3 x} = -\sqrt{-\frac{\pi}{\log p}}\, p^{-(\frac{x}{\pi})^2} \cdot \frac{2}{\theta_1'(o,p)} \cdot \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{p^{(\frac{2n-1}{2})^2} \cdot (1-p^{2(2n-1)})}{(1+p^{2(\frac{2n-1}{2}-\frac{x}{\pi})})(1+p^{2(\frac{2n-1}{2}+\frac{x}{\pi})})}$$

Chapitre neuvième.

Transformation des fonctions de Jacobi par rapport au nome.

74. Si l'on multiplie la série (5) du **62**:

$\theta_3 x = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, q^{m^2} \cdot \cos 2mx$ avec la série semblable: $\theta_3 y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, q^{n^2} \cos 2ny$,

on aura la série double:

$$\theta_3 x \,.\, \theta_3 y = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, q^{m^2+n^2} \cdot \cos 2mx \,.\, \cos 2ny.$$

Si l'on ajoute ici la série convergente double:

$$-\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, q^{m^2+n^2} \cdot \sin 2mx \,.\, \sin 2ny = 0,$$

dont les termes se détruisent deux à deux, on mettra le produit $\theta_3 x \,.\, \theta_3 y$ sous la forme:

$$\theta_3x \,.\, \theta_3y = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+n^2} \,.\, \cos\,(2(mx + ny)) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2\left(\left(\frac{m+n}{2}\right)^2+\left(\frac{m-n}{2}\right)^2\right)} \,.\, \cos\,((m+n)(x+y)+(m-n)(x-y)).$$

Or on remarque ici qu'à des valeurs entières de m et n correspondent des valeurs de m + n et m — n, qui sont en même temps toutes les deux des nombres pairs ou toutes les deux des nombres impairs, et qu'à chaque combinaison de valeurs de m + n et m — n correspond toujours une et seulement une combinaison de valeurs de m et n. Donc on a en général:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(m+n,\ m-n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(2m,\ 2n) + \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(2m-1,\ 2n-1).$$

En employant cette formule on réduit l'équation précédente à la forme:

$$\theta_3x \,.\, \theta_3y = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2(m^2+n^2)} \,.\, \cos(2m(x+y) + 2n\,(x-y)) +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2\left(\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\right)} \,.\, \cos\,((2m-1)(x+y)+(2n-1)(x-y)) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2(m^2+n^2)} \,.\, \cos(2m(x+y)) \,.\, \cos(2n(x-y)) -$$

$$- \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2(m^2+n^2)} \,.\, \sin(2m(x+y)) \,.\, \sin(2n(x-y)) +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2\left(\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\right)} \,.\, \cos((2m-1)(x+y)) \,.\, \cos((2n-1)(x-y)) -$$

$$- \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2\left(\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\right)} \,.\, \sin((2m-1)(x+y)) \,.\, \sin((2n-1)(x-y)).$$

Mais: $\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2(m^2+n^2)} \,.\, \sin(2m(x+y)) \,.\, \sin(2n(x-y)) = 0$

et: $\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2\left(\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\right)} \,.\, \sin((2m-1)(x+y)) \,.\, \sin((2n-1)(x-y)) = 0,$

puisque ces deux séries sont convergentes et leurs termes se détruisent deux et deux. De plus on a:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2(m^2+n^2)} \,.\, \cos\,(2m\,(x+y)) \,.\, \cos(2n(x-y)) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2m^2} \,.\, \cos(2m(x+y)) \,.\, \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2n^2} \,.\, \cos(2n(x-y)) - \theta_3(x+y,\, q^2) \,.\, \theta_3(x-y,\, q^2).$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2\left(\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\right)} \,.\, \cos((2m-1)(x+y)) \,.\, \cos((2n-1)(x-y)) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} \,.\, \cos((2m-1)(x+y)) \,.\, \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{2\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \,.\, \cos((2n-1)(x-y)) -$$

$$= \theta_2(x+y,\, q^2) \,.\, \theta_2(x-y, q^2).$$

Donc on a:

(1) $\theta_3(x,q)\,.\,\theta_3(y,q) = \theta_3(x+y,q^2)\,.\,\theta_3(x-y,q^2) + \theta_2(x+y,q^2)\,.\,\theta_2(x-y,q^2)$.

Si l'on substitue dans cette formule $x + \frac{\pi}{2}$ au lieu de x, et $y + \frac{\pi}{2}$ au lieu de y, on trouvera:

(2) $\theta(x,q)\,.\,\theta(y,q) = \theta_3(x+y,q^2)\,.\,\theta_3(x-y,q^2) - \theta_2(x+y,q^2)\,.\,\theta_2(x-y,q^2)$.

Si l'on substitue dans ces deux formules $x + \frac{i}{2}\log q$ au lieu de x et $y + \frac{i}{2}\log q$ au lieu de y, et qu'on remarque qu'en vertu des formules (3) du **63**, où l'on pose q^2 au lieu de q:

$$\theta_2(x + i\log q, q^2) = \theta_2(x + \tfrac{i}{2}\log q^2, q^2) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{q}}\,.\,\theta_3(x,q^2)$$

$$\theta_3(x + i\log q, q^2) = \theta_3(x + \tfrac{i}{2}\log q^2, q^2) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{q}}\,.\,\theta_2(x,q^2),$$

on trouvera de plus:

(3) $\theta_2(x,q)\,.\,\theta_2(y,q) = \theta_3(x+y,q^2)\,.\,\theta_2(x-y,q^2) + \theta_2(x+y,q^2)\,.\,\theta_3(x-y,q^2)$,

(4) $\theta_1(x,q)\,.\,\theta_1(y,q) = \theta_3(x+y,q^2)\,.\,\theta_2(x-y,q^2) - \theta_2(x+y,q^2)\,.\,\theta_3(x-y,q^2)$.

Si enfin on substitue dans ces quatres formules $x + \frac{\pi}{2}$ au lieu de x, on en tire:

(5) $\theta(x,q)\,.\,\theta_3(y,q) = \theta(x+y,q^2)\,.\,\theta(x-y,q^2) + \theta_1(x+y,q^2)\,.\,\theta_1(x-y,q^2)$,

(6) $\theta_3(x,q)\,.\,\theta(y,q) = \theta(x+y,q^2)\,.\,\theta(x-y,q^2) - \theta_1(x+y,q^2)\,.\,\theta_1(x-y,q^2)$.

(7) $\theta_1(x,q)\,.\,\theta_2(y,q) = \theta_1(x+y,q^2)\,.\,\theta(x-y,q^2) + \theta(x+y,q^2)\,.\,\theta_1(x-y,q^2)$,

(8) $\theta_2(x,q)\,.\,\theta_1(y,q) = \theta_1(x+y,q^2)\,.\,\theta(x-y,q^2) - \theta(x+y,q^2)\,.\,\theta_1(x-y,q^2)$.

De ces huit formules on tire de plus:

(9) $2\theta(x+y,q^2)\,.\,\theta(x-y,q^2) = \theta(x,q)\,.\,\theta_3(y,q) + \theta_3(x,q)\,.\,\theta(y,q)$,

(10) $2\theta_1(x+y,q^2)\,.\,\theta_1(x-y,q^2) = \theta(x,q)\,.\,\theta_3(y,q) - \theta_3(x,q)\,.\,\theta(y,q)$,

(11) $2\theta_2(x+y,q^2)\,.\,\theta_2(x-y,q^2) = \theta_3(x,q)\,.\,\theta_3(y,q) - \theta(x,q)\,.\,\theta(y,q)$,

(12) $2\theta_3(x+y,q^2)\,.\,\theta_3(x-y,q^2) = \theta_3(x,q)\,.\,\theta_3(y,q) + \theta(x,q)\,.\,\theta(y,q)$,

(13) $2\theta(x+y,q^2)\,.\,\theta_1(x-y,q^2) = \theta_1(x,q)\,.\,\theta_2(y,q) - \theta_2(x,q)\,.\,\theta_1(y,q)$,

(14) $2\theta_1(x+y,q^2)\,.\,\theta(x-y,q^2) = \theta_1(x,q)\,.\,\theta_2(y,q) + \theta_2(x,q)\,.\,\theta_1(y,q)$,

(15) $2\theta_2(x+y,q^2)\,.\,\theta_3(x-y,q^2) = \theta_2(x,q)\,.\,\theta_2(y,q) - \theta_1(x,q)\,.\,\theta_1(y,q)$,

(16) $2\theta_3(x+y,q^2)\,.\,\theta_2(x-y,q^2) = \theta_2(x,q)\,.\,\theta_2(y,q) + \theta_1(x,q)\,.\,\theta_1(y,q)$.

Si l'on pose dans ces formules $x + y = x'$, $x - y = y'$, puis qu'on change x' en x, y' en y, et q en $\sqrt{q}$, on aura les formules nouvelles:

(17) $\theta\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right)\,.\,\theta\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) = \theta_3(x,q)\,.\,\theta_3(y,q) - \theta_2(x,q)\,.\,\theta_2(y,q)$,

(18) $\theta_1\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right)\,.\,\theta_1\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) = \theta_3(x,q)\,.\,\theta_2(y,q) - \theta_2(x,q)\,.\,\theta_3(y,q)$,

(19) $\theta_2\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right)\,.\,\theta_2\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) = \theta_3(x,q)\,.\,\theta_2(y,q) + \theta_2(x,q)\,.\,\theta_3(y,q)$,

(20) $\theta_3\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right)\,.\,\theta_3\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) = \theta_3(x,q)\,.\,\theta_3(y,q) + \theta_2(x,q)\,.\,\theta_2(y,q)$,

(21) $\theta\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_3\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) = \theta(x,q).\theta(y,q) + \theta_1(x,q).\theta_1(y,q),$

(22) $\theta_3\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) = \theta(x,q).\theta(y,q) - \theta_1(x,q).\theta_1(y,q),$

(23) $\theta_1\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_2\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) = \theta_1(x,q).\theta(y,q) + \theta(x,q).\theta_1(y,q),$

(24) $\theta_2\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_1\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) = \theta_1(x,q).\theta(y,q) - \theta(x,q).\theta_1(y,q),$

(25) $2\theta(x,q).\theta(y,q) = \theta\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_3\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) + \theta_3\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right),$

(26) $2\theta_1(x,q).\theta_1(y,q) = \theta\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_3\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) - \theta_3\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right),$

(27) $2\theta_2(x,q).\theta_2(y,q) = \theta_3\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_3\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) - \theta\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right),$

(28) $2\theta_3(x,q).\theta_3(y,q) = \theta_3\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_3\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) + \theta\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right),$

(29) $2\theta(x,q).\theta_1(y,q) = \theta_1\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_2\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) - \theta_2\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_1\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right).$

(30) $2\theta_1(x,q).\theta(y,q) = \theta_1\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_2\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) + \theta_2\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_1\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right),$

(31) $2\theta_2(x,q).\theta_3(y,q) = \theta_2\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_2\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) - \theta_1\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_1\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right),$

(32) $2\theta_3(x,q).\theta_2(y,q) = \theta_2\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_2\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right) + \theta_1\left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{q}\right).\theta_1\left(\frac{x-y}{2}, \sqrt{q}\right).$

75. Si dans les formules du paragraphe précédent on pose $x = y$, on trouve:

(1) $\theta^2(x,q) = \theta_3(o,q^2).\theta_3(2x,q^2) - \theta_2(o,q^2).\theta_2(2x,q^2) =$
$= \frac{1}{2}\left\{\theta_3(o,\sqrt{q}).\theta(x,\sqrt{q}) + \theta(o,\sqrt{q}).\theta_3(x,\sqrt{q})\right\},$

(2) $\theta_1^2(x,q) = \theta_2(o,q^2).\theta_3(2x,q^2) - \theta_3(o,q^2).\theta_2(2x,q^2) =$
$= \frac{1}{2}\left\{\theta_3(o,\sqrt{q}).\theta(x,\sqrt{q}) - \theta(o,\sqrt{q}).\theta_3(x,\sqrt{q})\right\},$

(3) $\theta_2^2(x,q) = \theta_2(o,q^2).\theta_3(2x,q^2) + \theta_3(o,q^2).\theta_2(2x,q^2) =$
$= \frac{1}{2}\left\{\theta_3(o,\sqrt{q}).\theta_3(x,\sqrt{q}) - \theta(o,\sqrt{q}).\theta(x,\sqrt{q})\right\},$

(4) $\theta_3^2(x,q) = \theta_3(o,q^2).\theta_3(2x,q^2) + \theta_2(o,q^2).\theta_2(2x,q^2) =$
$= \frac{1}{2}\left\{\theta_3(o,\sqrt{q}).\theta_3(x,\sqrt{q}) + \theta(o,\sqrt{q}).\theta(x,\sqrt{q})\right\}.$

(5) $\theta(x,q).\theta_3(x,q) = \theta(o,q^2).\theta(2x,q^2),$

(6) $\theta_1(x,q).\theta_2(x,q) = \theta(o,q^2).\theta_1(2x,q^2),$

(7) $\theta(x,q).\theta_1(x,q) = \frac{1}{2}\theta_2(o,\sqrt{q}).\theta_1(x,\sqrt{q}),$

(8) $\theta_2(x,q).\theta_3(x,q) = \frac{1}{2}\theta_2(o,\sqrt{q}).\theta_2(x,\sqrt{q}),$

(9) $\theta_2(2x,q^2) = \frac{1}{2\theta_2(o,q^2)}\left\{\theta_3^2(x,q) - \theta^2(x,q)\right\} = \frac{1}{2\theta_3(o,q^2)}\left\{\theta_2^2(x,q) - \theta_1^2(x,q)\right\},$

(10) $\theta_3(2x,q^2) = \frac{1}{2\theta_3(o,q^2)}\left\{\theta_3^2(x,q) + \theta^2(x,q)\right\} = \frac{1}{2\theta_2(o,q^2)}\left\{\theta_2^2(x,q) + \theta_1^2(x,q)\right\}.$

Si l'on pose $y = o$ on trouvera les formules:

(11) $\theta(x,q)=\frac{1}{\theta(o,q)}\left\{\theta_3^2(x,q^2)-\theta_2^2(x,q^2)\right\}=\frac{1}{\theta_3(o,q)}\left\{\theta^2(x,q^2)+\theta_1^2(x,q^2)\right\}=$

$$=\frac{1}{\theta(o,q)}\cdot\theta(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})\cdot\theta_3(\tfrac{x}{2},\sqrt{q}),$$

(12) $\theta_1(x,q)=\frac{2}{\theta_2(o,q)}\cdot\theta(x,q^2)\cdot\theta_1(x,q^2)=\frac{1}{\theta(o,q)}\cdot\theta_1(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})\cdot\theta_2(\tfrac{x}{2},\sqrt{q}),$

(13) $\theta_2(x,q)=\frac{2}{\theta_2(o,q)}\cdot\theta_2(x,q^2)\cdot\theta_3(x,q^2)=$

$$=\frac{1}{2\theta_2(o,q)}\left\{\theta_3^2(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})-\theta^2(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})\right\}=\frac{1}{2\theta_3(o,\sqrt{q})}\left\{\theta_2^2(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})-\theta_1^2(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})\right\},$$

(14) $\theta_3(x,q)=\frac{1}{\theta_3(o,q)}\left\{\theta_3^2(x,q^2)+\theta_2^2(x,q^2)\right\}=\frac{1}{\theta(o,q)}\left\{\theta^2(x,q^2)-\theta_1^2(x,q^2)\right\}=$

$$=\frac{1}{2\theta_3(o,q)}\left\{\theta_3^2(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})+\theta^2(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})\right\}=\frac{1}{2\theta_2(o,q)}\left\{\theta_2^2(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})+\theta_1^2(\tfrac{x}{2},\sqrt{q})\right\},$$

(15) $2\theta^2(x,q^2)=\theta_3(o,q)\cdot\theta(x,q)+\theta(o,q)\cdot\theta_3(x,q),$

(16) $2\theta_1^2(x,q^2)=\theta_3(o,q)\cdot\theta(x,q)-\theta(o,q)\cdot\theta_3(x,q),$

(17) $2\theta_2^2(x,q^2)=\theta_3(o,q)\cdot\theta_3(x,q)-\theta(o,q)\cdot\theta(x,q),$

(18) $2\theta_3^2(x,q^2)=\theta_3(o,q)\cdot\theta_3(x,q)+\theta(o,q)\cdot\theta(x.q).$

76. Des quatres dernières formules du paragraphe précédent on tire en les multipliant deux et deux:

$$4\theta^2(x,q^2)\cdot\theta_3^2(x,q^2)=$$

$$=\left\{\theta_3(o,q)\cdot\theta(x,q)+\theta(o,q)\cdot\theta_3(x,q)\right\}\cdot\left\{\theta_3(o,q)\cdot\theta_3(x,q)+\theta(o,q)\cdot\theta(x,q)\right\}.$$

$$4\theta_1^2(x,q^2)\cdot\theta_2^2(x,q^2)=$$

$$=\left\{\theta_3(o,q)\cdot\theta(x,q)-\theta(o,q)\cdot\theta_3(x,q)\right\}\cdot\left\{\theta_3(o,q)\cdot\theta_3(x,q)-\theta(o,q)\cdot\theta(x,q)\right\}.$$

Les formules (5) et (6) du paragraphe précédent donnent, si l'on pose q^2 au lieu de q:

$$\theta(x,q^2)\cdot\theta_3(x,q^2)=\theta(o,q^4)\cdot\theta(2x,q^4),$$

$$\theta_1(x,q^2)\cdot\theta_2(x,q^2)=\theta(o,q^4)\cdot\theta_1(2x,q^4).$$

De là on trouve:

(1) $\theta(2x,q^4)=$

$$=\frac{1}{2\theta(o,q^4)}\cdot\sqrt{\left\{\theta_3(o,q)\cdot\theta(x,q)+\theta(o,q)\cdot\theta_3(x,q)\right\}\cdot\left\{\theta_3(o,q)\cdot\theta_3(x,q)+\theta(o,q)\cdot\theta(x,q)\right\}}$$

(2) $\theta_1(2x,q^4)=$

$$=\frac{1}{2\theta(o,q^4)}\cdot\sqrt{\left\{\theta_3(o,q)\cdot\theta(x,q)-\theta(o,q)\cdot\theta_3(x,q)\right\}\cdot\left\{\theta_3(o,q)\cdot\theta_3(x,q)-\theta(o,q)\cdot\theta(x,q)\right\}}.$$

Pour trouver les valeurs de $\theta_2(2x,q^4)$ et $\theta_3(2x,q^4)$ exprimées par les θfonctions de l'argument x avec le nome q on en cherche la somme et la différence. Or en substituant dans les formules:

$$\theta_2(x,q)=2\sum_1^\infty q^{(\frac{2m-1}{2})^2}\cdot\cos(2m-1)x,$$

$$\theta_3(x,q)=1+2\sum_1^\infty q^{m^2}\cdot\cos 2mx,$$

2x au lieu de x et q^4 au lieu de q, on trouve:

$$\theta_3(2x,q^4)+\theta_2(2x,q^4) = 1+2\sum_1^\infty{}_m(q^{4m^2}.\cos 4mx + q^{(2m-1)^2}.\cos(4m-2)x) =$$

$$= 1+2\sum_1^\infty{}_m q^{m^2}.\cos 2mx = \theta_3(x,q),$$

$$\theta_3(2x,q^4)-\theta_2(2x,q^4) = 1+2\sum_1^\infty{}_m(q^{4m^2}.\cos 4mx - q^{(2m-1)^2}.\cos(4m-2)x) =$$

$$= 1+2\sum_1^\infty{}_m(-1)^m q^{m^2}.\cos 2mx = \theta(x,q).$$

Donc on aura:

(3) $$\theta_2(2x,q^4) = \tfrac{1}{2}\{\theta_3(x,q) - \theta(x,q)\},$$

(4) $$\theta_3(2x,q^4) = \tfrac{1}{2}\{\theta_3(x,q) + \theta(x,q)\}.$$

77. Si dans les formules des deux paragraphes précédents on pose x = o, on trouvera:

(1) $\theta^2(o,q) = \theta_3^2(o,q^2) - \theta_2^2(o,q^2) = \theta(o,\sqrt{q}).\theta_3(o,\sqrt{q})$,

(2) $\theta_2^2(o,q) = 2\theta_2(o,q^2).\theta_3(o,q^2) = \tfrac{1}{2}\{\theta_3^2(o,\sqrt{q}) - \theta^2(o,\sqrt{q})\}$,

(3) $\theta_3^2(o,q) = \theta_3^2(o,q^2) + \theta_2^2(o,q^2) = \tfrac{1}{2}\{\theta_3^2(o,\sqrt{q}) + \theta^2(o,\sqrt{q})\}$,

(4) $\theta(o,q).\theta_3(o,q) = \theta^2(o,q^2)$,

(5) $\theta_2(o,q).\theta_3(o,q) = \tfrac{1}{2}\theta_2^2(o,\sqrt{q})$,

(6) $\theta_2^2(o,q^2) = \tfrac{1}{2}\{\theta_3^2(o,q) - \theta^2(o,q)\}$,

(7) $\theta_3^2(o,q^2) = \tfrac{1}{2}\{\theta_3^2(o,q) + \theta^2(o,q)\}$,

(8) $\theta^2(o,q^4) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\theta(o,q).\theta_3(o,q).\{\theta_3^2(o,q) + \theta^2(o,q)\}}$,

(9) $\theta_2(o,q^4) = \tfrac{1}{2}\{\theta_3(o,q) - \theta(o,q)\}$,

(10) $\theta_3(o,q^4) = \tfrac{1}{2}\{\theta_3(o,q) + \theta(o,q)\}$.

78. Nous chercherons maintenant les transformations que subissent les modules k et k' et les intégrales complètes, quand on change q en q^2 ou en $\sqrt{q}$. En vertu du **65** on a:

(1) $$k = \frac{\theta_2^2(o,q)}{\theta_3^2(o,q)},\quad k' = \frac{\theta^2(o,q)}{\theta_3^2(o,q)},\quad K = \frac{\pi}{2}.\theta_3^2(o,q),\quad K' = -\tfrac{1}{2}\theta_3^2(o,q).\log q.$$

Si l'on désigne par k_n, k'_n, K_n et K'_n les valeurs des modules et des intégrales complètes qui correspondent au nome q^n, on aura alors en vertu des formules du paragraphe précédent:

$$k_2 = \frac{\theta_2^2(o,q^2)}{\theta_3^2(o,q^2)} = \frac{\theta_3^2(o,q) - \theta^2(o,q)}{\theta_3^2(o,q) + \theta^2(o,q)},$$

$$k'_2 = \frac{\theta^2(o,q^2)}{\theta_3^2(o,q^2)} = \frac{2\theta(o,q).\theta_3(o,q)}{\theta_3^2(o,q) + \theta^2(o,q)},$$

$$K_2 = \frac{\pi}{2}.\theta_3^2(o,q^2) = \frac{\pi}{4}\{\theta_3^2(o,q) + \theta^2(o,q)\},$$

$$K'_2 = -\tfrac{1}{2}\theta_3^2(o,q^2).\log(q^2) = -\tfrac{1}{2}\{\theta_3^2(o,q) + \theta^2(o,q)\}.\log q$$

et de là en substituant les valeurs des formules (1):

$$(2)\quad k_2 = \frac{1-k'}{1+k'},\ k'_2 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},\ K_2 = K\,.\,\frac{1+k'}{2},\ K_2' = K'(1+k').$$

De même on trouvera les formules:

$$k_{\frac12} = \frac{\theta_2^2(o,\sqrt{q})}{\theta_3^2(o,\sqrt{q})} = \frac{2\theta_2(o,q)\,.\,\theta_3(o,q)}{\theta_3^2(o,q)+\theta_2^2(o,q)},$$

$$k'_{\frac12} = \frac{\theta^2(o,\sqrt{q})}{\theta_3^2(o,\sqrt{q})} = \frac{\theta_3^2(o,q)-\theta_2^2(o,q)}{\theta_3^2(o,q)+\theta_2^2(o,q)},$$

$$K_{\frac12} = \frac{\pi}{2}.\,\theta_3^2(o,\sqrt{q}) = \frac{\pi}{2}\left\{\theta_3^2(o,q)+\theta_2^2(o,q)\right\},$$

$$K'_{\frac12} = -\tfrac12\theta_3^2(o,\sqrt{q})\,.\,\log(\sqrt{q}) = -\tfrac14\left\{\theta_3^2(o,q)+\theta_2^2(o,q)\right\}.\log q,$$

et de là en substituant les valeurs des formules (1):

$$(3)\quad k_{\frac12} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ k'_{\frac12} = \frac{1-k}{1+k},\ K_{\frac12} = K(1+k),\ K'_{\frac12} = K'.\,\frac{1+k}{2}.$$

On peut aussi déduire les formules (3) des formules (2). En effet on trouve de ces formules:

$$(4)\quad k = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2},\ k' = \frac{1-k_2}{1+k_2},\ K = K_2(1+k_2),\ K' = K_2'\,.\,\frac{1+k_2}{2},$$

lesquelles coincident avec les formules (3), si l'on y pose $\sqrt{q}$ au lieu de q, donc $k_{\frac12}$, $k'_{\frac12}$, $K_{\frac12}$ et $K'_{\frac12}$ au lieu de k, k', K et K', et k, k', K, K' au lieu de k_2, k_2', K_2, K_2'.

En général on a:

$$(5)\quad \begin{cases} k_{2n} = \dfrac{1-k'_n}{1+k'_n},\ k'_{2n} = \dfrac{2\sqrt{k'_n}}{1+k'_n},\ K_{2n} = K_n\,.\,\dfrac{1+k'_n}{2},\ K'_{2n} = K'_n(1+k'_n), \\ k_n = \dfrac{2\sqrt{k_{2n}}}{1+k_{2n}},\ k'_n = \dfrac{1-k_{2n}}{1+k_{2n}},\ K_n = K_{2n}(1+k_{2n}),\ K'_n = K'_{2n}.\,\dfrac{1+k_{2n}}{2}. \end{cases}$$

Des formules (8), (9) et (10) du **77** on déduit:

$$(6)\quad \begin{cases} k_4 = \left(\dfrac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2,\ k'_4 = 2\sqrt{2}\,.\,\dfrac{\sqrt[4]{k'}\,.\,\sqrt{1+k'}}{(1+\sqrt{k'})^2}, \\ K_4 = \tfrac14 K(1+\sqrt{k'})^2,\ K_4' = K'(1+\sqrt{k'})^2, \end{cases}$$

lesquelles on déduit aussi facilement des formules (5), si l'on y pose successivement n = 2 et n = 1.

79. En divisant entre elles les formules du **75** on en tire des formules pour la transformation des fonctions elliptiques au module k en fonctions correspondantes des modules k_2 et $k_{\frac12}$. En effet on a:

$$\frac{\theta_1(x,q)}{\theta(x,q)} = \sqrt{k}\,.\,\sin\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right),$$

$$\frac{\theta_2(x,q)}{\theta(x,q)} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\,.\,\cos\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi},k\right),$$

$$\frac{\theta_3(x,q)}{\theta(x,q)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} . \Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right),$$

$$\frac{\theta_1(2x,q^2)}{\theta(2x,q^2)} = \sqrt{k_2} . \sin\mathrm{am}\left(\frac{2K_2 . 2x}{\pi}, k_2\right),$$

$$\frac{\theta_2(2x,q^2)}{\theta(2x,q^2)} = \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k'_2}} . \cos\mathrm{am}\left(\frac{2K_2 . 2x}{\pi}, k_2\right),$$

$$\frac{\theta_3(2x,q^2)}{\theta(2x,q^2)} = \frac{1}{\sqrt{k'_2}} . \Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{2K_2 . 2x}{\pi}, k_2\right),$$

ou, si l'on pose pour abréger: $\mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = \varphi$, $\mathrm{am}\left(\frac{4K_2 x}{\pi}, k_2\right) = \varphi_2$;

$$\frac{\theta_1(x,q)}{\theta(x,q)} = \sqrt{k} . \sin\varphi, \quad \frac{\theta_2(x,q)}{\theta(x,q)} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}} . \cos\varphi, \quad \frac{\theta_3(x,q)}{\theta(x,q)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} . \Delta\varphi,$$

$$\frac{\theta_1(2x,q^2)}{\theta(2x,q^2)} = \sqrt{k_2} . \sin\varphi_2, \quad \frac{\theta_2(2x,q^2)}{\theta(2x,q^2)} = \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k'_2}} . \cos\varphi_2, \quad \frac{\theta_3(2x,q^2)}{\theta(2x,q^2)} = \frac{1}{\sqrt{k'_2}} . \Delta\varphi_2.$$

De là on trouve, si l'on substitue les valeurs de $\theta(2x,q^2)$, $\theta_1(2x,q^2)$, $\theta_2(2x,q^2)$, $\theta_3(2x,q^2)$ données par les formules (5), (6), (9) et (10) du **75**:

$$\sin\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{k_2}} . \frac{\theta_1(2x,q^2)}{\theta(2x,q^2)} = \frac{1}{\sqrt{k_2}} . \frac{\theta_1(x,q).\theta_2(x,q)}{\theta(x,q) . \theta_3(x,q)} = \frac{k}{\sqrt{k_2}} . \frac{\sin\varphi . \cos\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{k_2'}}{\sqrt{k_2}} . \frac{\theta_2(2x,q^2)}{\theta(2x,q^2)} = \frac{\sqrt{k_2'}}{\sqrt{k_2}} . \tfrac{1}{2} . \frac{\theta(o,q^2)}{\theta_2(o,q^2)} . \frac{\theta_3^2(x,q) - \theta^2(x,q)}{\theta(x,q) . \theta_3(x,q)} =$$

$$= \tfrac{1}{2} . \frac{\sqrt{k'_2}}{\sqrt{k_2}} . \frac{\sqrt{k'_2}}{\sqrt{k_2}} . \left(\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{k'}} - \frac{\sqrt{k'}}{\Delta\varphi}\right) = \tfrac{1}{2} . \frac{k'_2}{k_2} . \frac{\Delta^2\varphi - k'}{\sqrt{k'} . \Delta\varphi} =$$

$$= \tfrac{1}{2} . \frac{k'_2}{k_2} . \frac{1 - k' - k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{k'} . \Delta\varphi} = \tfrac{1}{2} . \frac{k'_2}{k_2} . \frac{1 - k'}{\sqrt{k'}} . \frac{1 - (1 + k') . \sin^2\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\Delta\varphi_2 = \sqrt{k'_2} . \frac{\theta_3(2x,q^2)}{\theta(2x,q^2)} = \sqrt{k'_2} . \tfrac{1}{2} . \frac{\theta(o,q^2)}{\theta_3(o,q^2)} . \frac{\theta_3^2(x,q) + \theta^2(x,q)}{\theta(x,q) . \theta_3(x,q)} =$$

$$= \tfrac{1}{2} . \sqrt{k_2'} . \sqrt{k_2} \left(\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{k'}} + \frac{\sqrt{k'}}{\Delta\varphi}\right) = \tfrac{1}{2} . k_2' . \frac{1 + k'}{\sqrt{k'}} . \frac{1 - (1 - k') . \sin^2\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Maintenant on a en vertu des formules (2) du paragraphe précédent:

$$\sqrt{k_2} = \sqrt{\frac{1 - k'}{1 + k'}}, \quad \frac{k}{1 + k'}, \quad \frac{k_2'}{k_2} = \frac{2\sqrt{k'}}{1 - k'}, \quad k_2' = \frac{2\sqrt{k'}}{1 + k'};$$

donc on aura:

$$(1) \qquad \sin\varphi_2 = (1 + k') . \frac{\sin\varphi . \cos\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$(2) \qquad \cos\varphi_2 = \frac{1 - (1 + k') . \sin^2\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$(3) \qquad \Delta\varphi_2 = \frac{1 - (1 - k') . \sin^2\varphi}{\Delta\varphi}.$$

De ces formules on peut déduire d'autres qui donnent des relations encore plus simples entre les deux angles φ et φ_2. En effet on a:

$$\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi = (1+k') \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos^2\varphi}{\Delta\varphi} = (1+k') \cdot \frac{\sin\varphi - \sin^3\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi = \frac{\sin\varphi - (1+k') \cdot \sin^3\varphi}{\Delta\varphi}, \text{ donc:}$$

$$(4) \qquad \sin(\varphi_2 - \varphi) = k' \cdot \frac{\sin\varphi}{\Delta\varphi}.$$

De plus on a: $\cos\varphi_2 \cdot \cos\varphi = \frac{\cos\varphi - (1+k') \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi}{\Delta\varphi}$,

$$\sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi = \frac{(1+k') \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi}{\Delta\varphi}, \text{ donc:}$$

$$(5) \qquad \cos(\varphi_2 - \varphi) = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}.$$

En divisant ces deux formules on obtient la formule suivante très commode pour le calcul de φ_2:

$$(6) \qquad \operatorname{tang}(\varphi_2 - \varphi) = k' \cdot \operatorname{tang}\varphi.$$

De même on a:

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{2}{1+k'} \cdot \Delta\varphi \cdot \sin\varphi_2,$$

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi = 1 - 2 \cdot \frac{1 - \Delta\varphi \cdot \cos\varphi_2}{1+k'} = \frac{2\Delta\varphi \cdot \cos\varphi_2 - (1-k')}{1+k'}$$

et de là:

$$\sin 2\varphi \cdot \cos\varphi_2 = \frac{2}{1+k'} \cdot \Delta\varphi \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_2,$$

$$\cos 2\varphi \cdot \sin\varphi_2 = \frac{2}{1+k'} \cdot \Delta\varphi \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_2 - \frac{1-k'}{1+k'} \cdot \sin\varphi_2,$$

donc: $\sin 2\varphi \cdot \cos\varphi_2 - \cos 2\varphi \cdot \sin\varphi_2 = \frac{1-k'}{1+k'} \cdot \sin\varphi_2$, ou:

$$(7) \qquad \sin(2\varphi - \varphi_2) = k_2 \cdot \sin\varphi_2.$$

A l'aide de la formule (6) on calcule facilement φ_2, si l'on connaît φ, et à l'aide de la formule (7) on calcule φ, si l'on connaît φ_2.

80. Des valeurs $\varphi = \operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right)$ et $\varphi_2 = \operatorname{am}\left(\frac{4K_2x}{\pi}, k_2\right)$ on tire:

$$\frac{2Kx}{\pi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \frac{4K_2x}{\pi} = \int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\varphi}},$$

et de là:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{K}{2K_2} \cdot \int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\varphi}},$$

ou, puisque: $\frac{K}{2K_2} = \frac{1+k_2}{2} = \frac{1}{1+k'}$:

$$(1) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1+k_2}{2} \int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\varphi}},$$

(2) $$\int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\varphi}} = (1+k')\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

où: $k_2 = \frac{1-k'}{1+k'}$, $k = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}$

$$\tan(\varphi_2-\varphi) = k' \cdot \tan\varphi, \quad \sin(2\varphi-\varphi_2) = k_2 \cdot \sin\varphi_2.$$

La transformation d'une intégrale elliptique donnée par ces formules est nommée *la transformation de Landen* après un mathémacien anglais *John Landen*, qui le premier l'a développée dans les „Philosophical Transactions" des années 1771—1775.

81. Si l'on pose: $\mathrm{am}(\frac{2K_2x}{\pi}, k_2) = \psi_2$, on trouvera des formules (15), (16), (17) et (18) du **75**:

$$\sin^2\psi_2 = \frac{1}{k_2}\cdot\frac{\theta_1^2(x,q^2)}{\theta^2(x,q^2)} = \frac{1}{k_2}\cdot\frac{\theta_3(o,q).\theta(x,q) - \theta(o,q).\theta_3(x,q)}{\theta_3(o,q).\theta(x,q) + \theta(o,q).\theta_3(x,q)} = \frac{1}{k_2}\cdot\frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi},$$

$$\cos^2\psi_2 = \frac{k'_2}{k_2}\cdot\frac{\theta_2^2(x,q^2)}{\theta^2(x,q^2)} = \frac{k'_2}{k_2}\cdot\frac{\theta_3(o,q).\theta_3(x,q) - \theta(o,q).\theta(x,q)}{\theta_3(o,q).\theta(x,q) + \theta(o,q).\theta_3(x,q)} = \frac{k'_2}{k_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\frac{\Delta\varphi-k'}{1+\Delta\varphi},$$

$$\Delta^2\psi_2 = k'_2\cdot\frac{\theta_3^2(x,q^2)}{\theta^2(x,q^2)} = k'_2\cdot\frac{\theta_3(o,q).\theta_3(x,q) + \theta(o,q).\theta(x,q)}{\theta_3(o,q).\theta(x,q) + \theta(o,q).\theta_3(x,q)} = k'_2\cdot\frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\frac{\Delta\varphi+k'}{1+\Delta\varphi}.$$

ou, si l'on substitue: $k_2 = \frac{1-k'}{1+k'}$, $k'_2 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$:

(1) $$\sin^2\psi_2 = \frac{1+k'}{1-k'}\cdot\frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi},$$

(2) $$\cos^2\psi_2 = \frac{2}{1-k'}\cdot\frac{\Delta\varphi-k'}{1+\Delta\varphi},$$

(3) $$\Delta^2\psi_2 = \frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\Delta\varphi+k'}{1+\Delta\varphi}.$$

Des formules précédentes on tire de plus:

(4) $$\sin\varphi = \frac{(1+k_2)\sin\psi_2}{1+k_2\sin^2\psi_2},$$

(5) $$\cos\varphi = \frac{\cos\psi_2\cdot\Delta\psi_2}{1+k_2\cdot\sin^2\psi_2},$$

(6) $$\Delta\varphi = \frac{1-k_2\cdot\sin^2\psi_2}{1+k_2\cdot\sin^2\psi_2}$$

et des formules (4) et (5):

(7) $$\tan\varphi = (1+k_2)\cdot\frac{\tan\psi_2}{\Delta\psi_2}.$$

Des formules: $\varphi = \mathrm{am}(\frac{2Kx}{\pi}, k)$, $\psi_2 = \mathrm{am}(\frac{2K_2x}{\pi}, k_2)$, on conclut:

$$\frac{2Kx}{\pi} = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \frac{2K_2x}{\pi} = \int_0^{\psi_2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\varphi}}.$$

Puisque: $\frac{K}{K_2} = 1 + k_2 = \frac{2}{1+k'}$ on a donc:

$$(8) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = (1+k_2).\int_0^{\psi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\varphi}},$$

$$(9) \qquad \int_0^{\psi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_2^2\sin^2\varphi}} = \frac{1+k'}{2} \cdot \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Dans la première de ces formules on a: $k_2 = \frac{1-k'}{1+k'}$, et ψ_2 est déterminée en fonction de φ par les formules (1), (2) et (3); dans la seconde on a: $k' = \frac{1-k_2}{1+k_2}$, $k = \frac{2\sqrt{k_2}}{1+k_2}$, et φ est déterminée en fonction de ψ_2 par la formule (7).

82. Si l'on pose: $\mathrm{am}(\frac{4K_4 x}{\pi}, k_4) = \chi_4$, on trouvera des formules du **76**:

$$\sin^2\chi_4 = \frac{1}{k_4} \cdot \frac{\theta_1^2(2x,q^4)}{\theta^2(2x,q^4)} =$$

$$= \frac{1}{k_4} \cdot \frac{\theta_3(o,q).\theta(x,q) - \theta(o,q).\theta_3(x,q)}{\theta_3(o,q).\theta(x,q) + \theta(o,q).\theta_3(x,q)} \cdot \frac{\theta_3(o,q).\theta_3(x,q) - \theta(o,q).\theta(x,q)}{\theta_3(o,q).\theta_3(x,q) + \theta(o,q).\theta(x,q)} =$$

$$= \frac{1}{k_4} \cdot \frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi - k'}{\Delta\varphi + k'},$$

$$\cos^2\chi_4 = \frac{k'^2_4}{k_4} \cdot \frac{\theta_2^2(2x,q^4)}{\theta^2(2x,q^4)} =$$

$$= \frac{k'^2_4}{k_4} \cdot \theta^2(o,q^4) \cdot \frac{\theta_3(x,q) - \theta(x,q)}{\theta_3(o,q)\theta(x,q) + \theta(o,q).\theta_3(x,q)} \cdot \frac{\theta_3(x,q) - \theta(x,q)}{\theta_3(o,q).\theta_3(x,q) + \theta(o,q).\theta(x,q)} =$$

$$= \frac{k'^2_4}{k_4} \cdot \frac{2K_4 \cdot k'_4}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2K}}\left(\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{k'}} - 1\right)}{1+\Delta\varphi} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2K}}(\Delta\varphi - \sqrt{k'})}{\Delta\varphi + k'} =$$

$$= \frac{k'^2_4 \cdot K_4}{k_4 \cdot K\sqrt{k'}} \cdot \frac{(\Delta\varphi - \sqrt{k'})^2}{(1+\Delta\varphi)(\Delta\varphi + k')},$$

$$\Delta^2\chi_4 = k'_4 \cdot \frac{\theta_3^2(2x,q^4)}{\theta^2(2x,q^4)} =$$

$$= k'_4 \cdot \theta^2(o,q^4) \cdot \frac{\theta_3(x,q) + \theta(x,q)}{\theta_3(o,q).\theta(x,q) + \theta(o,q).\theta_3(x,q)} \cdot \frac{\theta_3(x,q) + \theta(x,q)}{\theta_3(o,q).\theta_3(x,q) + \theta(o,q).\theta(x,q)} =$$

$$= k'_4 \cdot \frac{2K_4 \cdot k'_4}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2K}}\left(\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{k'}} + 1\right)}{1+\Delta\varphi} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2K}}(\Delta\varphi + \sqrt{k'})}{\Delta\varphi + k'} =$$

$$= \frac{k'^2_4 \cdot K_4}{K\sqrt{k'}} \cdot \frac{(\Delta\varphi + \sqrt{k'})^2}{(1+\Delta\varphi)(\Delta\varphi + k')},$$

ou, si l'on substitue du **78**: $k_4 = \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$, $k'_4 = 2\sqrt{2}.\frac{\sqrt[4]{k'}.\sqrt{1+k'}}{(1+\sqrt{k'})^2}$, $K_4 = \frac{1}{4}K(1+\sqrt{k'})^2$:

$$(1)\qquad \sin^2\chi_4 = \left(\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\right)^2 \cdot \frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi - k'}{\Delta\varphi + k'},$$

$$(2)\qquad \cos^2\chi_4 = \frac{2(1+k')}{(1-\sqrt{k'})^2} \cdot \frac{(\Delta\varphi - \sqrt{k'})^2}{(1+\Delta\varphi)(\Delta\varphi + k')},$$

$$(3)\qquad \Delta^2\chi_4 = \frac{2(1+k')}{(1+\sqrt{k'})^2} \cdot \frac{(\Delta\varphi + \sqrt{k'})^2}{(1+\Delta\varphi)(\Delta\varphi + k')}.$$

On peut déduire ces formules des formules du **79** et **81**. En effet si l'on change k en k_2, k_2 sera changée en k_4, φ en ψ_2, et φ_2 en χ_4. Donc on tire des formules (1), (2) et (3) du **79** en substituant k_2 au lieu de k:

$$\sin^2\chi_4 = (1+k'_2)^2 \cdot \frac{\sin^2\psi_2 \cdot \cos^2\psi_2}{\Delta^2\psi_2} = (1+k'_2)^2 \cdot \left(\frac{1+k'}{1-k'}\right)^2 \frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi - k'}{\Delta\varphi + k'} =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\right)^2 \cdot \frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi - k'}{\Delta\varphi + k'},$$

$$\cos^2\chi_4 = \frac{(1-(1+k'_2)\cdot\sin^2\psi_2)^2}{\Delta^2\psi_2} = \frac{\left(1-(1+k'_2)\cdot\frac{1+k'}{1-k'}\cdot\frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi}\right)^2}{\frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\Delta\varphi+k'}{1+\Delta\varphi}} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\cdot\frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi}\right)^2}{\frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\Delta\varphi+k'}{1+\Delta\varphi}} = \frac{\left(\frac{2}{1-\sqrt{k'}}\cdot\frac{\Delta\varphi-\sqrt{k'}}{1+\Delta\varphi}\right)^2}{\frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\Delta\varphi+\sqrt{k'}}{1+\Delta\varphi}} =$$

$$= \frac{2(1+k')}{(1-\sqrt{k'})^2} \cdot \frac{(\Delta\varphi-\sqrt{k'})^2}{(1+\Delta\varphi)(\Delta\varphi+k')},$$

$$\Delta^2\chi_4 = \frac{(1-(1-k'_2)\cdot\sin^2\psi_2)^2}{\Delta^2\psi_2} = \frac{\left(1-(1-k'_2)\cdot\frac{1+k'}{1-k'}\cdot\frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi}\right)^2}{\frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\Delta\varphi+k'}{1+\Delta\varphi}} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\cdot\frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi}\right)^2}{\frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\Delta\varphi+k'}{1+\Delta\varphi}} = \frac{\left(\frac{2}{1+\sqrt{k'}}\cdot\frac{\Delta\varphi+\sqrt{k'}}{1+\Delta\varphi}\right)^2}{\frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\Delta\varphi+k'}{1+\Delta\varphi}} =$$

$$= \frac{2(1+k')}{(1+\sqrt{k'})^2} \cdot \frac{(\Delta\varphi+\sqrt{k'})^2}{(1+\Delta\varphi)(\Delta\varphi+k')}.$$

Des formules (2) et (3) on tire:

$$(4)\qquad \frac{\cos\chi_4}{\Delta\chi_4} = \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}} \cdot \frac{\Delta\varphi - \sqrt{k'}}{\Delta\varphi + \sqrt{k'}},$$

et de là, puisque: $k_4 = \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$, $\sqrt{k'} = \frac{1-\sqrt{k_4}}{1+\sqrt{k_4}}$:

$$(5)\qquad \Delta\varphi = \frac{1-\sqrt{k_4}}{1+\sqrt{k_4}} \cdot \frac{\Delta\chi_4 + \sqrt{k_4}\cdot\cos\chi_4}{\Delta\chi_4 - \sqrt{k_4}\cdot\cos\chi_4}.$$

Des formules: $\varphi = \mathrm{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right)$, $\chi_4 = \mathrm{am}\left(\frac{4K_4x}{\pi}, k_4\right)$ on conclut:

$$\frac{2Kx}{\pi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \frac{4K_4x}{\pi} = \int_0^{\chi_4} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_4^2\sin^2\varphi}}.$$

Puisque: $\frac{K_4}{K} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{k'})^2 = \frac{1}{(1+\sqrt{k_4})^2}$, on a donc:

$$(6) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{(1+\sqrt{k_4})^2}{2} \cdot \int_0^{\chi_4} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_4^2\sin^2\varphi}},$$

$$(7) \qquad \int_0^{\chi_4} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_4^2\sin^2\varphi}} = \frac{(1+\sqrt{k'})^2}{2} \cdot \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

où: $k_4 = \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$, $k' = \left(\frac{1-\sqrt{k_4}}{1+\sqrt{k_4}}\right)^2$, $k = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{k_4} \cdot \frac{\sqrt{1+k_4}}{(1+\sqrt{k_4})^2}$,

et où χ_4 est déterminée en fonction de φ par les équations (1), (2) et (3). φ en fonction de χ_4 par l'équation (5).

83. Nous considérons encore la transformation des fonctions de Jacobi et celle des fonctions elliptiques quand on change le signe du nome q.

Or pour ce qui concerne les θfonctions on tire immédiatement des formules du **62** que:

$$(1) \quad \begin{cases} \theta(x,-q) = \theta_3(x,q), \ \theta_1(x,-q) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 \pm i) \cdot \theta_1(x,q), \\ \theta_2(x,-q) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 \pm i) \cdot \theta_2(x,q), \ \theta_3(x,-q) = \theta(x,q), \end{cases}$$

puisque: $-q = q \cdot e^{\pm i\pi}$, $\sqrt[4]{-q} = \sqrt[4]{q} \cdot e^{\pm \frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 \pm i)\sqrt[4]{q}$.

Si l'on désigne par $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}'$ les valeurs des modules et des intégrales complètes correspondantes au nome: $-q$, on les trouvera à l'aide de la formule (18) du **65**:

$$\mathfrak{k} = \frac{\theta_2^2(0,-q)}{\theta_3^2(0,-q)}, \quad \mathfrak{k}' = \frac{\theta^2(0,-q)}{\theta_3^2(0,-q)}, \quad \mathfrak{K} = \frac{\pi}{2} \cdot \theta_3^2(0,-q), \quad \mathfrak{K}' = -\frac{\mathfrak{K}}{\pi} \cdot \log(-q).$$

Or on a:

$$\theta^2(0,-q) = \theta_3^2(0,q), \ \theta_2^2(0,q) = \pm i \cdot \theta_2^2(0,q), \ \theta_3^2(0,-q) = \theta^2(0,q),$$

$$\log(-q) = \log(q \cdot e^{\pm i\pi}) = \log q \pm i\pi = -\frac{\pi K'}{K} \pm i\pi = -\frac{\pi}{K}(K' \mp iK)$$

Donc on a:

$$(2) \qquad \mathfrak{k} = \pm \frac{ik}{k'}, \quad \mathfrak{k}' = \frac{1}{k'}, \quad \mathfrak{K} = k'K, \quad \mathfrak{K}' = k'(K' \mp iK).$$

Le signe de i sera déterminé suivant les régles du **1**. Si le module k est réel et plus petit que l'unité, k' sera aussi réel, et on doit alors partout choisir le signe inférieur; si k est réel, mais plus grand que l'unité, k'^2 sera une quantité négative: $k' = -i\sqrt{-k'^2}$, donc $\mathfrak{k}$ une quantité réelle, qui suivant les règles du **1** doit être positive, donc on choisira encore le signe

nférieur; si k^2 est une quantité réelle mais négative, on aura: $k = -i\sqrt{-k^2}$, et k' sera une quantité réelle et positive, donc $\mathfrak{k}$ sera une quantité réelle, qui suivant les règles du **1** doit être positive, donc on choisira alors le signe supérieur; enfin si k et k' sont toutes les deux des quantités imaginaires, $k = a + ib$, $k' = a' + ib'$, où a et a' sont des quantités positives, b et b' de signe contraires, $\mathfrak{k}$ sera aussi une quantité imaginaire, dont la partie réelle doit être positive, donc on choisira le signe supérieur si $a'b - ab'$ est une quantité négative, le signe inférieur si $a'b - ab'$ est une quantité positive.

En substituant les valeurs des θfonctions au nome $-q$ dans les formules du **64** on obtient les formules:

$$\sin am(u,\mathfrak{k}) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{k}}} \cdot \frac{\theta_1(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, -q)}{\theta(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, -q)} = \frac{\sqrt{2.(1\pm i)}}{2\sqrt{\mathfrak{k}}} \cdot \frac{\theta_1(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, q)}{\theta_3(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, q)} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_1(\frac{\pi u}{2k'\overline{K}}, q)}{\theta_3(\frac{\pi u}{2k'\overline{K}}, q)},$$

$$\cos am(u,\mathfrak{k}) = \frac{\sqrt{\mathfrak{k}'}}{\sqrt{\mathfrak{k}}} \cdot \frac{\theta_2(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, -q)}{\theta(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, -q)} = \frac{\sqrt{2.(1\pm i).\sqrt{\mathfrak{k}'}}}{2\sqrt{\mathfrak{k}}} \cdot \frac{\theta_2(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, q)}{\theta_3(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, q)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_2(\frac{\pi u}{2k'\overline{K}}, q)}{\theta_3(\frac{\pi u}{2k'\overline{K}}, q)},$$

$$\Delta am(u,\mathfrak{k}) = \sqrt{\mathfrak{k}'} \cdot \frac{\theta_3(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, -q)}{\theta(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, -q)} = \sqrt{\mathfrak{k}'} \cdot \frac{\theta(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, q)}{\theta_3(\frac{\pi u}{2\mathfrak{K}}, q)} = \frac{1}{\sqrt{k'}} \cdot \frac{\theta(\frac{\pi u}{2k'\overline{K}}, q)}{\theta_3(\frac{\pi u}{2k'\overline{K}}, q)}$$

et de là:

$$(3) \qquad \sin am(u,\mathfrak{k}) = k' \frac{\sin am(\frac{u}{k'}, k)}{\Delta am(\frac{u}{k'}, k)},$$

$$(4) \qquad \cos am(u,\mathfrak{k}) = \frac{\cos am(\frac{u}{k'}, k)}{\Delta am(\frac{u}{k'}, k)},$$

$$(5) \qquad \Delta am(u,\mathfrak{k}) = \frac{1}{\Delta am(\frac{u}{k'}, k)}$$

où $\mathfrak{k} = -\frac{ik}{k'}$, si k^2 est une quantité réelle et positive, ou si $k = a + ib$, $k' = a' + ib'$ et $a'b - ab'$ une quantité positive, mais $\mathfrak{k} = \frac{ik}{k'}$ si k^2 est une quantité réelle et négative, ou si $k = a + ib$, $k' = a' + ib'$ et $a'b - ab'$ une quantité négative.

Si l'on substitue $k'u$ au lieu de u, on trouve des formules précédentes:

$$(6) \qquad \sin am(u,k) = \mathfrak{k}' \cdot \frac{\sin am(k'u,\mathfrak{k})}{\Delta am(k'u,\mathfrak{k})},$$

$$(7)\qquad \cos am(u,k) = \frac{\cos am(k'u,\mathfrak{k})}{\Delta am(k'u,\mathfrak{k})},$$

$$(8)\qquad \Delta am(u,k) = \frac{1}{\Delta am(k'u,\mathfrak{k})}.$$

84. Si dans les formules du paragraphe précédent on change k en k', donc q en p, on trouvera la transformation des fonctions de Jacobi et celle des fonctions elliptiques quand on change le signe du nome complémentaire p.

On trouve alors:

$$(1)\qquad \begin{cases} \theta\ (x,-p) = \theta_3(x,p),\ \theta_1(x,-p) = \frac{V2}{2}(1 \pm i)\,.\,\theta_1(x,p), \\ \theta_2(x,-p) = \frac{V2}{2}(1 \pm i)\,.\,\theta_2(x,p),\ \theta_3(x,-p) = \theta\ (x,p), \end{cases}$$

et, si l'on désigne par $\mathfrak{k},\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{K},\mathfrak{K}'$ les valeurs des modules et des intégrales complètes correspondantes au nome complémentaire: —p, on aura:

$$(2)\qquad \mathfrak{k} = \frac{1}{k}, \mathfrak{k}' = \pm\frac{ik'}{k},\ \mathfrak{K} = k(K \mp iK'),\ \mathfrak{K}' = kK'.$$

Si l'on désigne par $\mathfrak{q}$ la valeur du nome qui correspond au module $\mathfrak{k}$ et au nome complémentaire: —p, on aura:

$$(3)\qquad \mathfrak{q} = e^{-\frac{\pi\mathfrak{K}'}{\mathfrak{K}}} = e^{-\frac{\pi K'}{K \mp iK'}} = e^{-\frac{\pi K'(K \pm iK')}{K^2+K'^2}}.$$

On choisira ici partout le signe supérieur, si k est une quantité réelle plus grande que l'unité, ou si $k = a + ib$, $k' = a' + ib'$, et $a'b - ab'$ une quantité positive, mais le signe inférieur, si k est une quantité réelle plus petite que l'unité, ou si k^2 est une quantité réelle mais négative, ou si $k = a + ib, k' = a' + ib'$ et $a'b - ab'$ une quantité négative.

En vertu des formules (8) du **63** où l'on pose x au lieu de ix, on a maintenant:

$$\theta(x,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\,.\,e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}\,.\,\theta_2\left(\frac{iKx}{K'},\ p\right),$$

$$\theta_1(x,q) = -i\sqrt{\frac{K}{K'}}\,.\,e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}\,.\,\theta_1\left(\frac{iKx}{K'},\ p\right),$$

$$\theta_2(x,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\,.\,e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}\,.\,\theta\ \left(\frac{iKx}{K'},\ p\right),$$

$$\theta_3(x,q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\,.\,e^{-\frac{Kx^2}{\pi K'}}\,.\theta_3\left(\frac{iKx}{K'},\ p\right).$$

Donc on aura:

$$(4)\quad \theta(x,q) = \sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}}\cdot e^{-\frac{\mathfrak{H}x^2}{\pi\mathfrak{H}'}}\cdot\theta_2\left(\frac{i\mathfrak{H}x}{\mathfrak{H}'}, -p\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\cdot\sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}}\cdot e^{-\frac{\mathfrak{H}x^2}{\pi\mathfrak{H}'}}\cdot\theta_2\left(\frac{i\mathfrak{H}x}{\mathfrak{H}'}, p\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\cdot\sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}}\cdot\sqrt{\frac{K'}{K}}\cdot e^{\frac{x^2}{\pi}\left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}-\frac{K'}{K}\cdot\frac{\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{H}'^2}\right)}\cdot\theta\left(\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}\cdot\frac{K'}{K}\cdot x,\ q\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\cdot\sqrt{\frac{K\mp iK'}{K}}\cdot e^{\frac{x^2}{\pi}\left(\frac{K'\pm iK}{K}\right)}\cdot\theta\left(\frac{(K\mp iK')x}{K},\ q\right),$$

$$(5)\quad \theta_1(x,q) = -i\sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}}\cdot e^{-\frac{\mathfrak{H}x^2}{\pi\mathfrak{H}'}}\cdot\theta_1\left(\frac{i\mathfrak{H}x}{\mathfrak{H}'}, -p\right) =$$

$$= -i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\cdot\sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}}\cdot e^{-\frac{\mathfrak{H}x^2}{\pi\mathfrak{H}'}}\cdot\theta_1\left(\frac{i\mathfrak{H}x}{\mathfrak{H}'}, p\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)\cdot\sqrt{\frac{K\mp iK'}{K}}\cdot e^{\frac{x^2}{\pi}\left(\frac{K'\pm iK}{K}\right)}\cdot\theta_1\left(\frac{(K\mp iK')x}{K},\ q\right),$$

$$(6)\quad \theta_2(x,q) = \sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}}\cdot e^{-\frac{\mathfrak{H}x^2}{\pi\mathfrak{H}'}}\cdot\theta\left(\frac{i\mathfrak{H}x}{\mathfrak{H}'}, -p\right) = \sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}}\cdot e^{-\frac{\mathfrak{H}x^2}{\pi\mathfrak{H}'}}\cdot\theta_3\left(\frac{i\mathfrak{H}x}{\mathfrak{H}'}, p\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{K\mp iK'}{K}}\cdot e^{\frac{x^2}{\pi}\left(\frac{K'\pm iK}{K}\right)}\cdot\theta_3\left(\frac{(K\mp iK')x}{K},\ q\right),$$

$$(7)\quad \theta_3(x,q) = \sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}}\cdot e^{-\frac{\mathfrak{H}x^2}{\pi\mathfrak{H}'}}\cdot\theta_3\left(\frac{i\mathfrak{H}x}{\mathfrak{H}'}, -p\right) = \sqrt{\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}}\cdot e^{-\frac{\mathfrak{H}x^2}{\pi\mathfrak{H}'}}\cdot\theta\left(\frac{i\mathfrak{H}x}{\mathfrak{H}'}, p\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{K\mp iK'}{K}}\cdot e^{\frac{x^2}{\pi}\left(\frac{K'\pm iK}{K}\right)}\cdot\theta_2\left(\frac{(K\mp iK')x}{K},\ q\right).$$

De là on trouve de plus:

$$\sin am(u,\mathfrak{h}) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{h}}}\cdot\frac{\theta_1\left(\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{h}}}\cdot\frac{\theta_1\left(\frac{K\mp iK'}{K}\cdot\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)}{\theta\left(\frac{K\mp iK'}{K}\cdot\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)} = \sqrt{k}\cdot\frac{\theta_1\left(\frac{\pi u}{2kK}, q\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2kK}, q\right)},$$

$$\cos am(u,\mathfrak{h}) = \frac{\sqrt{\mathfrak{h}'}}{\sqrt{\mathfrak{h}}}\cdot\frac{\theta_2\left(\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)} = \frac{\sqrt{\mathfrak{h}'}}{\sqrt{\mathfrak{h}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}.(1\pm i)}\cdot\frac{\theta_3\left(\frac{K\mp iK'}{K}\cdot\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)}{\theta\left(\frac{K\mp iK'}{K}\cdot\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)} =$$

$$= \sqrt{k'}\cdot\frac{\theta_3\left(\frac{\pi u}{2kK}, q\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2kK}, q\right)},$$

$$\Delta am(u,\mathfrak{h}) = \sqrt{\mathfrak{h}'}\cdot\frac{\theta_3\left(\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)} = \sqrt{\mathfrak{h}'}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}.(1\pm i)}\cdot\frac{\theta_2\left(\frac{K\mp iK'}{K}\cdot\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)}{\theta\left(\frac{K\mp iK'}{K}\cdot\frac{\pi u}{2\mathfrak{H}}, q\right)} = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_2\left(\frac{\pi u}{2kK}, q\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2kK}, q\right)}.$$

Donc on a:

(8) $\sin am(u,\mathfrak{k}) = \sin am(u,\frac{1}{k}) = k \cdot \sin am(\frac{u}{k}, k)$,

(9) $\cos am(u,\mathfrak{k}) = \cos am(u,\frac{1}{k}) = \Delta am(\frac{u}{k}, k)$,

(10) $\Delta am(u,\mathfrak{k}) = \Delta am(u,\frac{1}{k}) = \cos am(\frac{u}{k}, k)$,

(11) $\sin am(u,k) = \frac{1}{k} \cdot \sin am(ku, \frac{1}{k})$,

(12) $\cos am(u,k) = \Delta am(ku, \frac{1}{k})$,

(13) $\Delta am(u,k) = \cos am(ku, \frac{1}{k})$,

85. On peut facilement déduire les formules (11), (12) et (13) du paragraphe précédent ainsi que les formules (6), (7) et (8) du **83** immédiatement de la définition des fonctions elliptiques.

En effet, si dans l'intégrale définie:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2x^2}},$$

où: $x = \sin am(u,k)$, $\sqrt{1-x^2} = \cos am(u,k)$, $\sqrt{1-k^2x^2} = \Delta am(u,k)$, on pose $kx = \xi$, on trouvera:

$$ku = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{1-\frac{\xi^2}{k^2}} \cdot \sqrt{1-\xi^2}}.$$

De cette équation on tire:

$$\xi = \sin am(ku, \frac{1}{k}),\ \sqrt{1-\xi^2} = \cos am(ku, \frac{1}{k}),\ \sqrt{1-\frac{\xi^2}{k^2}} = \Delta am(ku, \frac{1}{k}).$$

Donc, puisque: $\xi = kx$, $\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-k^2x^2}$, $\sqrt{1-\frac{\xi^2}{k^2}} = \sqrt{1-x^2}$, on aura:

(1) $\sin am(ku, \frac{1}{k}) = k \cdot \sin am(u,k)$,

(2) $\cos am(ku, \frac{1}{k}) = \Delta am(u,k)$,

(3) $\Delta am(ku, \frac{1}{k}) = \cos am(u,k)$,

formules, qui coincident avec les formules du paragraphe précédent.

Si l'on pose ici iu au lieu de u, et qu'on ait égard aux formules (1) du **19**:

$$\sin am(iu,k) = i \cdot \frac{\sin am(u,k')}{\cos am(u,k')},\quad \cos am(iu,k) = \frac{1}{\cos am(u,k')},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{iu},\mathrm{k}) \quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}(\mathrm{u},\mathrm{k}')}{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')},$$

et qu'on remarque que $\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}}$ est le module compémentaire correspondant au module $\frac{1}{\mathrm{k}}$, on trouvera:

$$\sin\mathrm{am}\,(\mathrm{iku},\frac{1}{\mathrm{k}}) = \mathrm{i}\,.\,\frac{\sin\mathrm{am}(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})}{\cos\mathrm{am}(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})},$$

$$\cos\mathrm{am}(\mathrm{iku},\frac{1}{\mathrm{k}}) = \frac{1}{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{iku},\frac{1}{\mathrm{k}}) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})}{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})}.$$

Or en vertu des formules précédentes (1), (2) et (3) ces équations deviennent:

$$\mathrm{i}\,.\,\frac{\sin\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})}{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})} = \mathrm{k}\,.\,\sin\mathrm{am}\,(\mathrm{iu},\mathrm{k}) = \mathrm{ik}\,.\,\frac{\sin\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')}{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')},$$

$$\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})} = \Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{iu},\mathrm{k}) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')}{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')},$$

$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})}{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}})} = \cos\mathrm{am}\,(\mathrm{iu},\mathrm{k}) = \frac{1}{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')},$$

desquelles on tire:

$$\sin\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}}) = \mathrm{k}\,.\,\frac{\sin\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')}{\Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')},$$

$$\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}}) = \frac{\cos\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')}{\Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')},$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{ku},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}}) = \frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\mathrm{k}')},$$

et si l'on pose $\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{k}}$ au lieu de u:

$$(4) \qquad \sin\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}}) = \mathrm{k}\,.\,\frac{\sin\mathrm{am}\,(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{k}},\mathrm{k}')}{\Delta\,\mathrm{am}\,(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{k}},\mathrm{k}')},$$

$$(5) \qquad \cos\mathrm{am}\,(\mathrm{u},\pm\frac{\mathrm{ik}'}{\mathrm{k}}) = \frac{\cos\mathrm{am}\,(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{k}},\mathrm{k}')}{\Delta\,\mathrm{am}\,(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{k}},\mathrm{k}')},$$

$$(6)\qquad \Delta\,\mathrm{am}\,(u, \pm\tfrac{ik'}{k}) = \frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,(\frac{u}{k}, k')}.$$

Si l'on change ici k en k', on aura enfin les formules (3), (4) et (5) du **83**:

$$(7)\qquad \sin\mathrm{am}\,(u, \pm\tfrac{ik}{k'}) = k'.\frac{\sin\mathrm{am}(\frac{u}{k'}, k)}{\Delta\,\mathrm{am}(\frac{u}{k'}, k)},$$

$$(8)\qquad \cos\mathrm{am}\,(u, \pm\tfrac{ik}{k'}) = \frac{\cos\mathrm{am}\,(\frac{u}{k'}, k)}{\Delta\,\mathrm{am}\,(\frac{u}{k'}, k)},$$

$$(9)\qquad \Delta\,\mathrm{am}\,(u, \pm\tfrac{ik}{k'}) = \frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,(\frac{u}{k'}, k)},$$

Dans les formules (4), (5) et (6) le signe de i est déterminé par les règles du **84**, dans les formules (7), (8) et (9) par les règles du **83**.

Chapitre dixième.

Développement des modules et des intégrales complètes en séries infinies.

86. Si l'on pose $u = o$ dans les formules du septième et du huitième chapitre, on en déduira un grand nombre de formules, qui donnent le développement des modules k et k' et des intégrales complètes K et K' ainsi que des différentes fonctions rationelles de ces quantités en séries infinies.

Quelques-unes des formules précédentes deviennent zéro pour la valeur $u = o$. Alors on les divise par u ou par u^2, en remarquant que:

$$\lim(\frac{\sin\mathrm{am}\,u}{u}) = 1,\ \lim(\frac{u - \sin\mathrm{am}\,u}{u^3}) = \frac{1+k^2}{6},$$

donc pour des valeurs évanouissantes de u:

$$\sin\mathrm{am}\,u = u - \frac{1+k^2}{6}u^3,\quad \cos\mathrm{am}\,u = 1 - \tfrac{1}{2}u^2,\quad \Delta\,\mathrm{am}\,u = 1 - \tfrac{1}{2}k^2u^2,$$

et de plus:

$$e^u = 1 + u + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{6}u^3,\quad \sin u = u - \tfrac{1}{6}u^3,\quad \cos u = 1 - \tfrac{1}{2}u^2.$$

Des formules du **39** on trouve alors:

$$(1)\qquad \frac{4kK'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n.\frac{p^{2n}}{(1+p^{2n})^2},$$

$$(2)\qquad \frac{2kK'}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n.\frac{p^n}{1+p^{2n}},$$

$$(3)\qquad \frac{8k^2K'^3}{\pi^3} = 1 - 4\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n}} + 32\sum_1^\infty{}_n \frac{p^{3n}}{(1+p^{2n})^3},$$

(4) $$\frac{2K'}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n}},$$

Des formules du **40** on trouve:

(5) $$\frac{kK^2}{\pi^2} = \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{q^n(1+q^{2n-1})}{(1-q^{2n-1})^2},$$

(6) $$\frac{kK}{2\pi} = -\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^n}{1-q^{2n-1}},$$

(7) $$\frac{k^2K^3}{2\pi^3} = -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n-1}(1+q^{2n-1})}{(1-q^{2n-1})^3}.$$

Des formules du **41** on trouve:

(8) $$\frac{2kK'}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}},$$

(9) $$\frac{kk'K'^2}{\pi^2} = -\frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{p^n(1-p^{2n-1})}{(1+p^{2n-1})^2},$$

(10) $$\frac{k'K'}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n-1}},$$

(11) $$\frac{kK}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1+q^{2n-1}},$$

(12) $$\frac{kk'K^2}{\pi^2} = -\frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^n(1-q^{2n-1})}{(1+q^{2n-1})^2},$$

(13) $$\frac{(1-k')K}{4\pi} = -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}},$$

Des formules du **42** on trouve:

(14) $$\frac{2(1+k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{p^{2n}}{(1-p^{2n})^2},$$

(15) $$\frac{4(2k^2-1)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{p^n(1+p^{2n})}{(1-p^{2n})^2},$$

(16) $$\frac{4(2-k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n(1+p^{2n})}{(1-p^{2n})^2},$$

(17) $$\frac{4(1+k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n(1+q^{2n})}{(1-q^{2n})^2},$$

(18) $$\frac{4(1-2k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^n(1+q^{2n})}{(1-q^{2n})^2},$$

(19) $$\frac{2(2-k^2)K^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2},$$

(20) $$\frac{2K}{\pi} = 1 - 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}.$$

Des formules du **43** on trouve:

(21) $$\frac{2K'}{\pi} = 1 - 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}},$$

(22) $$\frac{k'K'}{2\pi} = -\frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{p^n}{1-p^{2n-1}}.$$

(23) $$\frac{k'K'^2}{\pi^2} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{p^n(1+p^{2n-1})}{(1-p^{2n-1})^2},$$

(24) $$\frac{2K}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1+q^{2n}},$$

(25) $$\frac{2k'K}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^n}{1+q^{2n}},$$

(26) $$\frac{4k'K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}.$$

Des formules du **44** on trouve:

(27) $$\frac{k'^2K'^2}{4\pi^2} = \sum_1^\infty{}_n \frac{p^{2n-1}(1+p^{2(2n-1)})}{(1-p^{2(2n-1)})^2},$$

(28) $$\frac{4(2k^2-1)K'^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{(1-(-1)^n p^n)^2},$$

(29) $$\frac{4(2-k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{p^n}{(1-p^n)^2},$$

(30) $$\frac{2(1+k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{p^{2n}(1+p^{4n})}{(1-p^{4n})^2},$$

(31) $$\frac{4K'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{(1+(-1)^n p^n)^2},$$

(32) $$\frac{4k^2K'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{p^n}{(1+p^n)^2},$$

(33) $$\frac{4k'^2K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^n}{(1+q^n)^2},$$

(34) $$\frac{4(1-2k^2)K^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{(1-(-1)^n q^n)^2},$$

(35) $$\frac{2(2-k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n}(1+q^{4n})}{(1-q^{4n})^2},$$

(36) $$\frac{4(1+k^2)K^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^n}{(1-q^n)^2},$$

(37) $$\frac{4K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{(1+(-1)^n q^n)^2},$$

(38) $$\frac{k^2K^2}{4\pi^2} = \sum_1^\infty{}_n \frac{q^{2n-1}(1+q^{2(2n-1)})}{(1-q^{2(2n-1)})^2}.$$

Des formules du **51** on trouve:

(39) $$\frac{4(1+k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1+q^n},$$

(40) $$\frac{4K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n},$$

(41) $$\frac{k^2K^2}{4\pi^2} = \sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}},$$

(42) $$\frac{2(1+k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)p^{2(2n-1)}}{1-p^{2(2n-1)}},$$

(43) $$\frac{4K'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{np^n}{1+(-1)^n p^n},$$

(44) $$\frac{4k^2K'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{np^n}{1+p^n},$$

(45) $$\frac{4k'^2K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{nq^n}{1+q^n},$$

(46) $$\frac{4(1-2k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n},$$

(47) $$\frac{2(2-k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^{2(2n-1)}}{1-q^{2(2n-1)}},$$

(48) $$\frac{k'^2K'^2}{4\pi^2} = \sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)p^{2n-1}}{1-p^{2(2n-1)}},$$

(49) $$\frac{4(2k^2-1)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{np^n}{1+(-1)^n p^n},$$

(50) $$\frac{4(2-k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{np^n}{1+p^n}.$$

Des formules du **52** on trouve:

(51) $$\frac{2(2-k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^{2n}}{1+q^{2n}},$$

(52) $$\frac{4(1-2k^2)K^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}},$$

(53) $$\frac{4(1+k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}},$$

(54) $$\frac{4(2-k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}},$$

(55) $$\frac{4(2k^2-1)K'^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}},$$

(56) $$\frac{2(1+k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{np^{2n}}{1+p^{2n}},$$

Des formules du **53** on trouve:

(57) $$\frac{4k'K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{nq^{2n}}{1+q^{2n}},$$

(58) $$\frac{2k'K}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}},$$

(59) $$\frac{2K}{\pi} = 1 - 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}},$$

(60) $$\frac{k'K'^2}{\pi^2} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)p^n}{1-p^{2n-1}},$$

(61) $$\frac{k'K'}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n-1}},$$

(62) $$\frac{2K'}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n \frac{p^n}{1+p^{2n}},$$

Des formules du **54** on trouve:

(63) $$\frac{2K'}{\pi} = 1 - 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}},$$

(64) $$\frac{2kK'}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}},$$

(65) $$\frac{4kK'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{np^{2n}}{1+p^{2n}},$$

(66) $$\frac{2K}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1+q^{2n}},$$

(67) $$\frac{kK}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{q}} . \sum_1^\infty{}_n \frac{q^n}{1+q^{2n-1}},$$

(68) $$\frac{kK^2}{\pi^2} = \frac{1}{\sqrt{q}} . \sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^n}{1-q^{2n-1}},$$

(69) $$\sum_1^\infty{}_n nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2},$$

(70) $$\sum_1^\infty{}_n (2n-1)q^{n-1} = \frac{1+q}{(1-q)^2},$$

(71) $$\sum_1^\infty{}_n q^{n-1} = \frac{1}{1-q},$$

Des formules du **55** on tire:

(72) $$\frac{2k'K}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{q^n}{1+q^{2n}},$$

(73) $$\frac{kk'K^2}{\pi^2} = -\frac{1}{\sqrt{q}} . \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{(2n-1)q^n}{1+q^{2n-1}},$$

(74) $$\frac{kK}{2\pi} = -\frac{1}{\sqrt{q}} . \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{q^n}{1-q^{2n-1}},$$

(75) $$\frac{k'K'}{2\pi} = -\frac{1}{\sqrt{p}} . \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{p^n}{1-p^{2n-1}},$$

(76) $$\frac{kk'K'^2}{\pi^2} = -\frac{1}{\sqrt{p}} . \sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{(2n-1)p^n}{1+p^{2n-1}},$$

(77) $$\frac{2kK'}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{p^n}{1+p^{2n}}.$$

Des formules du **65** on trouve en remarquant qu'en vertu des formules (18) du même paragraphe:

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},\ \theta_{20} = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\ \theta_{30} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$\theta'_{10} = \theta_0 . \theta_{20} . \theta_{30} = \frac{2K}{\pi} . \sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}},\ \log p = -\frac{\pi K}{K'}:$$

(78) $$\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = 1 + 2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n q^{n^2},$$

(79) $$\sqrt{\frac{k'K'}{2\pi}} = \sum_1^\infty{}_n p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2},$$

(80) $$\frac{K}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}} = -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot (2n-1) q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2},$$

(81) $$\frac{K'}{\pi} \sqrt{\frac{2kk'K'}{\pi}} = -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot (2n-1) p^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2},$$

(82) $$\sqrt{\frac{kK}{2\pi}} = \sum_1^\infty{}_n q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2},$$

(83) $$\sqrt{\frac{2kK'}{\pi}} = 1 + 2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n p^{n^2},$$

(84) $$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2\sum_1^\infty{}_n q^{n^2},$$

(85) $$\sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = 1 + 2\sum_1^\infty{}_n p^{n^2}.$$

Des formules du **70** on trouve:

(86) $$\frac{k^2K^4}{\pi^4} = \sum_1^\infty{}_n \frac{n^3 q^n}{1-q^{2n}},$$

(87) $$\frac{k^2K^2}{4\pi^2} = \sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}},$$

(88) $$\frac{4K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n},$$

(89) $$\frac{k^2K^2}{4\pi^2} = \sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}},$$

(90) $$\frac{k^2k'^2K^4}{\pi^4} = -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{n^3 q^n}{1-q^{2n}},$$

(91) $$\frac{4k'^2K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{nq^n}{1+q^n},$$

(92) $$\frac{4K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n},$$

(93) $$\frac{4k'^2K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{nq^n}{1+q^n},$$

(94) $$\frac{16k'^2K^4}{\pi^4} = 1 + 16\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{n^3 q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

(95) $$\frac{4(1+k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1+q^n},$$

(96) $$\frac{4(1-2k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n},$$

(97) $$\frac{2(2-k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^{2(2n-1)}}{1-q^{2(2n-1)}},$$

(98) $$\frac{4(1+k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}},$$

(99) $$\frac{16K^4}{\pi^4} = 1 + 16\sum_1^\infty{}_n \frac{n^3q^n}{1-(-1)^nq^n},$$

(100) $$\frac{k^4K^4}{16\pi^4} = \sum_1^\infty{}_n \frac{n^3q^{2n}}{1-q^{4n}},$$

(101) $$\frac{16k'^4K^4}{\pi^4} = 1 + 16\sum_1^\infty{}_n (-1)^n.\frac{n^3q^n}{1-q^n},$$

(102) $$\frac{4(1-2k^2)K^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}},$$

(103) $$\frac{2(2-k^2)K^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^{2n}}{1+q^{2n}}.$$

Des formules du **71** on trouve en remarquant que:

$$\theta^2(o,p) = \frac{2kK'}{\pi},\ \theta_2^2(o.p) = \frac{2k'K'}{\pi},\ \theta_3^2(o,p) = \frac{2K'}{\pi},$$

(104) $$\frac{16k^2K'^4}{\pi^4} = 1 + 16\sum_1^\infty{}_n (-1)^n.\frac{n^3p^{2n}}{1-p^{2n}},$$

(105) $$\frac{4k^2K'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n.\frac{np^n}{1+p^n},$$

(106) $$\frac{4K'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{np^n}{1+(-1)^np^n},$$

(107) $$\frac{4k^2K'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n (-1)^n\frac{np^n}{1+p^n},$$

(108) $$\frac{k^2k'^2K'^4}{\pi^4} = -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n.\frac{n^3p^n}{1-p^{2n}},$$

(109) $$\frac{k'^2K'^2}{4\pi^2} = \sum_1^\infty{}_n (2n-1).\frac{p^{2n-1}}{1-p^{2(2n-1)}},$$

(110) $$\frac{4K'^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n \frac{np^n}{1+(-1)^np^n},$$

(111) $$\frac{k'^2K'^2}{4\pi^2} = \sum_1^\infty{}_n (2n-1).\frac{p^{2n-1}}{1-p^{2(2n-1)}},$$

(112) $$\frac{k'^2K'^4}{\pi^4} = \sum_1^\infty{}_n \frac{n^3p^n}{1-p^{2n}},$$

(113) $$\frac{2(1+k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)p^{2(2n-1)}}{1-p^{2(2n-1)}},$$

(114) $$\frac{4(2k^2-1)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n (-1)^n.\frac{np^n}{1+(-1)^np^n},$$

(115) $$\frac{4(2-k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{np^n}{1+p^n},$$

(116) $$\frac{2(1+k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{np^{2n}}{1+p^{2n}},$$

(117) $$\frac{16K'^4}{\pi^4} = 1 + 16\sum_1^\infty{}_n \frac{n^3p^n}{1-(-1)^np^n},$$

(118) $$\frac{16k^4K'^4}{\pi^4} = 1 + 16\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{n^3p^n}{1-p^n},$$

(119) $$\frac{k'^4K'^4}{16\pi^4} = \sum_1^\infty{}_n \frac{n^3p^{2n}}{1-p^{4n}},$$

(120) $$\frac{4(2k^2-1)K'^2}{\pi^2} = 1 - 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}},$$

(121) $$\frac{4(2-k^2)K'^2}{\pi^2} = 1 + 24\sum_1^\infty{}_n \frac{(2n-1)p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}}.$$

Enfin des formules du **73** on trouve:

(122) $$\frac{K\sqrt{k}}{\pi} = -\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.q^{(\frac{2n-1}{2})^2}.\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}},$$

(123) $$\frac{2K\sqrt{k'}}{\pi} = -\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.q^{n^2-n}.\frac{(1-q^{2n})^2}{1+q^{2n}},$$

(124) $$\frac{2K\sqrt{k'}}{\pi} = 1+4\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{q^{n^2+n}}{1+q^{2n}},$$

(125) $$\frac{K\sqrt{kk'}}{\pi} = -\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.q^{(\frac{2n-1}{2})^2}.\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}},$$

(126) $$\frac{2K'\sqrt{k}}{\pi} = -\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.p^{n^2-n}.\frac{(1-p^{2n})^2}{1+p^{2n}},$$

(127) $$\frac{2K'\sqrt{k}}{\pi} = 1+4\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{p^{n^2+n}}{1+p^{2n}},$$

(128) $$\frac{K'\sqrt{k'}}{\pi} = -\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.p^{(\frac{2n-1}{2})^2}.\frac{1+p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}},$$

(129) $$\frac{K'\sqrt{kk'}}{\pi} = -\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.p^{(\frac{2n-1}{2})^2}.\frac{1-p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}}.$$

87. Des 129 formules du paragraphe précédent les suivantes sont identiques, savoir: (59) et (20), (61) et (10), (62) et (4), (63) et (21), (64) et (8), (66) et (24), (67) et (11), (72) et (25), (74) et (6), (75) et (22), (77) et (2), (87) et (41), (92) et (88) et (40), (89) et (41), (93) et (91) et (15), (95) et (39), (96) et (46), (97) et (47), (98) et (53), (102) et (52), (103) et (51), (107) et (105) et (44), (106) et (43), (111) et (109) et (48), (110) et (43), (113) et (42), (114) et (49), (115) et (50), (116) et (56), (120) et (55), (121) et (54).

Des 94 formules qui restent les 44 suivantes se déduisent des 44 ci-jointes, si l'on change q et p, donc k et k', K et K', savoir: (1) et (26), (2)

et (25), (4) et (24), (8) et (58), (9) et (12), (10) et (11), (14) et (19), (15) et (18), (16) et (17), (21) et (20), (22) et (6), (23) et (5), (27) et (38), (28) et (34), (29) et (36), (30) et (35), (31) et (37), (32) et (33), (42) et (47), (43) et (40), (44) et (45), (48) et (41), (49) et (46), (50) et (39), (54) et (53), (55) et (52), (56) et (51), (60) et (68), (65) et (57), (76) et (73), (79) et (82), (81) et (80), (83) et (78), (85) et (84), (104) et (94), (108) et (90), (112) et (86), (117) et (99), (118) et (101), (119) et (100), (126) et (123), (127) et (124), (128) et (122), (129) et (125).

Des 50 formules qui restent, les suivantes ne sont que la somme ou la différence d'autres formules multipliées par certaines coefficients numériques. Ainsi, si l'on désigne les formules précédentes par leurs numéros, on a:
$(13) = \frac{1}{8}(20) - \frac{1}{8}(58)$, $(17) = 3(37) - \frac{3}{2}(33) - \frac{1}{2}(36)$, $(18) = \frac{3}{8}(33) - \frac{1}{2}(36)$,
$(19) = \frac{3}{4}(33) + \frac{1}{4}(36)$, $(31) = 3(33) - 3(37) + (36)$, $(35) = \frac{3}{2}(37) - \frac{1}{2}(36)$,
$(38) = \frac{1}{16}(37) - \frac{1}{16}(33)$, $(41) = \frac{1}{16}(40) - \frac{1}{16}(45)$, $(46) = 3(45) - 3(40) + (39)$,
$(47) = \frac{3}{2}(40) - \frac{1}{2}(39)$, $(51) = \frac{3}{4}(45) + \frac{1}{4}(39)$, $(52) = \frac{3}{2}(45) - \frac{1}{2}(39)$,
$(53) = \frac{3}{2}(40) - \frac{1}{2}(46)$, $(70) = 2(69) - (71)$.

Des 36 formules qui restent alors, on tire les formules suivantes qui donnent des relations entre des séries infinies, fonctions de q, où q désigne une quantité quelconque réelle dont la valeur numérique est plus petite que l'unité, ou une quantité imaginaire dont le module est plus petit que l'unité. Nous ajoutons à la fin des formules les numéros des formules du paragraphe précédent, desquelles on les tire. Nous transformons la formule (3) en fonction de q en y remplaçant k par k', donc p par q, K' par K:

(1) $\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n-1}} = -\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^n}{1-q^{2n-1}}$, (11) = (6),

(2) $\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} = -\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}$, (24) = (20),

(3) $\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^n}{1+q^{2n}} = \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}$, (25) = (58),

(4) $\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2} = \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{nq^{2n}}{1+q^{2n}}$, (26) = (57),

(5) $-\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = \sum_1^\infty \frac{nq^n}{1+q^n}$, (36) = (39),

(6) $\sum_1^\infty \frac{q^n}{(1-(-1)^n q^n)^2} = -\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n}$, (34) = (46),

(7) $\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^n}{(1+q^n)^2} = \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{nq^n}{1+q^n}$, (33) = (45),

(8) $\sum_1^\infty \frac{q^n}{(1+(-1)^n q^n)^2} = \sum_1^\infty \frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n}$, (37) = (40),

(9) $\sum_1^\infty \frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} \cdot \frac{q^n}{1-q^{2n-1}} = \sum_1^\infty (2n-1) \cdot \frac{q^n}{1-q^{2n-1}}$, (5) = (68),

(10) $\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \cdot \frac{q^n}{1+q^{2n-1}} = \sum_1^\infty (-1)^n \cdot (2n-1) \cdot \frac{q^n}{1+q^{2n-1}}$, (12) = (73),

(11) $1-4\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} + 32\sum_1^\infty \frac{q^{3n}}{(1+q^{2n})^3} = \left\{1+2\sum_1^\infty (-1)^n \cdot q^{n^2}\right\}^4 \cdot \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^2$,

(3) = (78)^4. (84)^2,

(12) $-\sum_1^\infty (-1)^n \cdot q^{2n-2} \cdot \frac{1+q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^3} = \left\{\sum_1^\infty q^{n^2-n}\right\}^4 \cdot \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^2$, (7) = (82)^4.(84)^2,

(13) $\sum_1^\infty \frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}} = \left\{\sum_1^\infty q^{n^2-n}\right\}^2$, (11) = (82)^2,

(14) $1+4\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} = \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^2$, (24) = (84)^2,

(15) $1+4\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^n}{1+q^{2n}} = \left\{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}\right\}^2$, (25) = (78)^2,

(16) $1+8\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2} = \left\{1+2\sum_1^\infty (-1)^n \cdot q^{n^2}\right\}^2 \cdot \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^2$, (26) = (78)^2.(84)^2,

(17) $1+8\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^n}{(1+q^n)^2} = \left\{1+2\sum_1^\infty (-1)^n \cdot q^{n^2}\right\}^4$, (33) = (78)^4,

(18) $1-24\sum_1^\infty (-1)^n \cdot \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^4 + 16q\left\{\sum_1^\infty q^{n^2-n}\right\}^4$,

(36) = (84)^4 + 16 . (82)^4,

(19) $1+8\sum_1^\infty \frac{q^n}{(1+(-1)^n q^n)^2} = \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^4$, (37) = (84)^4,

(20) $\sum_1^\infty (2n-1) \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q^{2n-1}} = \left\{\sum_1^\infty q^{n^2-n}\right\}^2 \cdot \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^2$, (68) = (82)^2. (84)^2,

(21) $\sum_1^\infty n q^{n-1} = \left\{\sum_1^\infty q^{n-1}\right\}^2$, (69) = (71)^2,

(22) $-\sum_1^\infty (-1)^n \cdot (2n-1) \cdot \frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-1}} = \left\{\sum_1^\infty q^{n^2-n}\right\}^2 \cdot \left\{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}\right\}^2$,

(73) = (82)^2. (78)^2,

(23) $-\sum_1^\infty (-1)^n (2n-1) q^{n^2-n} = \left\{\sum_1^\infty q^{n^2-n}\right\} \cdot \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\} \cdot \left\{1+2\sum_1^\infty (-1)^n \cdot q^{n^2}\right\}$,

(80) = (82) . (84) . (78),

(24) $16q\left\{\sum_1^\infty q^{n^2-n}\right\}^4 = \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^4 - \left\{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}\right\}^4$, 16(82)^4 = (84)^4 − (78)^4,

(25) $\sum_1^\infty \frac{n^3 q^{n-1}}{1-q^{2n}} = \left\{\sum_1^\infty q^{n^2-n}\right\}^4 \cdot \left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^4$, (86) = (82)^4. (84)^4,

(26) $-\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n^3 q^{n-1}}{1-q^{2n}} = \left\{\sum_1^\infty q^{n^2-n}\right\}^4 \cdot \left\{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}\right\}^4$, (90) = (82)^4.(78)^4,

(27) $1+16\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}=\left\{1+2\sum_1^\infty{}_nq^{n^2}\right\}^4.\left\{1+2\sum_1^\infty{}_n(-1)^nq^{n^2}\right\}^4,$

$(94)=(84)^4.(78)^4,$

(28) $1+16\sum_1^\infty{}_n\frac{n^3q^n}{1-(-1)^nq^n}=\left\{1+2\sum_1^\infty{}_nq^{n^2}\right\}^8 (99)=(84)^8,$

(29) $\sum_1^\infty{}_n\frac{n^3q^{2n-2}}{1-q^{4n}}=\left\{\sum_1^\infty{}_nq^{n^2-n}\right\}^8, \quad (100)=(82)^8,$

(30) $1+16\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{n^3q^n}{1-q^n}=\left\{1+2\sum_1^\infty{}_n(-1)^nq^{n^2}\right\}^8, \ (101)=(78)^8$

(31) $-\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.q^{n^2-n}.\frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}=\left\{\sum_1^\infty{}_nq^{n^2-n}\right\}.\left\{1+2\sum_1^\infty{}_nq^{n^2}\right\},(122)=(82).(84)$

(32) $-\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.q^{n^2-n}.\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}=\left\{\sum_1^\infty{}_nq^{n^2-n}\right\}.\left\{1+2\sum_1^\infty{}_n(-1)^nq^{n^2}\right\},(125)=(82).(78).$

(33) $-\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.q^{n^2-n}.\frac{(1-q^{2n})^2}{1+q^{2n}}=1+4\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{q^{n^2+n}}{1+q^{2n}}=$

$=\left\{1+2\sum_1^\infty{}_nq^{n^2}\right\}.\left\{1+2\sum_1^\infty{}_n(-1)^nq^{n^2}\right\}, \ (123)=(124)=(84).(78).$

88. Des formules du 86 on peut tirer les valeurs des modules k et k' et de l'intégrale complète K en fonctions de q, exprimés par différentes séries infinies. De toutes ces séries les plus simples, à l'aide desquelles nous avons exprimé toutes les autres, sont les séries (78), (82) et (84):

(1) $\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}=1+2\sum_1^\infty{}_n(-1)^nq^{n^2}=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}.\ldots,$

(2) $\sqrt{\frac{kK}{2\pi}}=\sum_1^\infty{}_nq^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}=\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\sqrt[4]{q^{49}}+\ldots,$

$=\sqrt[4]{q}.\sum_1^\infty{}_nq^{n^2-n}=\sqrt[4]{q}\left\{1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots\right\},$

(3) $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}=1+2\sum_1^\infty{}_nq^{n^2}=1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots.$

De ces formules on tire:

(4) $K=\frac{\pi}{2}\left\{1+2\sum_1^\infty{}_nq^{n^2}\right\}^2=\frac{\pi}{2}\left\{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots\right\}^2,$

(5) $k=4\left\{\frac{\sum_1^\infty{}_nq^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)}}{1+2\sum_1^\infty{}_nq^{n^2}}\right\}^2=4\left\{\frac{\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}\right\}^2=$

$=4\sqrt{q}\left\{\frac{\sum_1^\infty{}_nq^{n^2-n}}{1+2\sum_1^\infty{}_nq^{n^2}}\right\}^2=4\sqrt{q}\left\{\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}\right\}^2,$

$$(6)\quad k' = \left\{\frac{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}}{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}}\right\}^2 = \left\{\frac{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}\right\}^2.$$

L'intégrale complète K' se tire de l'équation: $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, donc:

$$(7)\quad K' = \frac{K}{\pi}.\log\left(\frac{1}{q}\right) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{q}\right)\left\{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\right\}^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{q}\right)\left\{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots\right\}^2.$$

89. Les formules du **48** ou, ce qui revient au même, les formules (18) du **65**, donnent le développement des modules et des intégrales complètes en produits d'un nombre infini de facteurs:

$$(1)\quad k = 4\sqrt{q}.\prod_1^\infty\left\{\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right\}^4,$$

$$(2)\quad k' = \prod_1^\infty\left\{\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right\}^4,$$

$$(3)\quad K = \frac{\pi}{2}.\prod_1^\infty (1+q^{2n-1})^4.(1-q^{2n})^2,$$

auxquelles formules on peut ajouter la suivante:

$$(4)\quad K' = \frac{K}{\pi}.\log\left(\frac{1}{q}\right) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1}{q}\right).\prod_1^\infty (1+q^{2n-1})^4.(1-q^{2n})^2.$$

Des formules du **65** on tire de plus en substituant les valeurs:

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},\quad \theta_{20} = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\quad \theta_{30} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$\theta_1'0 = \theta_0.\theta_{20}.\theta_{30} = \frac{2K}{\pi}.\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}},$$

et en remarquant que: $\theta_1'0 = 2\sqrt[4]{q}.\prod_1^\infty (1-q^{2n})^3$:

$$(5)\quad \prod_1^\infty (1-q^{2n})^{12} = \frac{4k^2k'^2K^6}{\pi^6}.\frac{1}{q},$$

$$(6)\quad \prod_1^\infty (1-q^{2n-1})^{12} = \frac{4k'^2}{k}.\sqrt{q},$$

$$(7)\quad \prod_1^\infty (1+q^{2n})^{12} = \frac{k^2}{16k'}.\frac{1}{q},$$

$$(8)\quad \prod_1^\infty (1+q^{2n-1})^{12} = \frac{4}{kk'}.\sqrt{q}.$$

De là on trouve la formule suivante:

$$(9)\quad \prod_1^\infty (1+q^{2n})(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1}) = \prod_1^\infty (1+q^n)(1-q^{2n-1}) = 1.$$

90. Pour trouver la valeur du nome q en fonction du module k, il faut intervertir la série (5) du **88**. A cet effet on développe en série la fraction du membre droit. On trouve alors:

$$\sqrt{\frac{k}{4}} = \sqrt[4]{q}\cdot\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots} =$$

$$= \sqrt[4]{q}\{1-2q+5q^2-10q^3+18q^4-32q^5+55q^6-\ldots\}.$$

De là on trouve:

$$(1)\quad \sqrt[4]{q} = \sqrt{\frac{k}{4}}\cdot\left\{1+2.\left(\frac{k}{4}\right)^2+15\left(\frac{k}{4}\right)^4+150\left(\frac{k}{4}\right)^6+1707\left(\frac{k}{4}\right)^8+20912\left(\frac{k}{4}\right)^{10}\right\}.$$

Si l'on change ici k en k', donc q en p, on trouvera:

$$(2)\quad \sqrt[4]{p} = \sqrt{\frac{k'}{4}}\left\{1+2\left(\frac{k'}{4}\right)^2+15\left(\frac{k'}{4}\right)^4+150\left(\frac{k'}{4}\right)^6+1707\left(\frac{k'}{4}\right)^8+20912\left(\frac{k'}{4}\right)^{10}+\ldots\right\}.$$

Dans le paragraphe **15** du chapitre second nous avons déja trouvé:

$$(3)\quad K = \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2.k^6+\ldots\right\}.$$

En employant ici les transformations du **78**, on peut en déduire d'autres séries. En effet, si l'on pose $k_2 = \frac{1-k'}{1+k'}$ au lieu de k, et $K_2 = K.\frac{1+k'}{2}$ au lieu de K, on tire de la formule précédente:

$$(4)\quad K = \frac{\pi}{1+k'}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^4+\ldots\right\}.$$

Si l'on pose $k_4 = \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$ au lieu de k, donc: $K_4 = K.\frac{(1+\sqrt{k'})^2}{4}$ au lieu de K, on trouve:

$$(5)\quad K = \frac{2\pi}{(1+\sqrt{k'})^2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^4+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^8+\ldots\right\}.$$

91. Cherchons maintenant les développements des logarithmes des modules et des intégrales complètes. Or, si dans les formules du **50** on pose $u = o$, et qu'on remarque que: $\lim_{u=o}\left(\frac{\sin am\, u}{u}\right) = 1$, on trouve:

$$(1)\quad \log\left(\frac{K\sqrt{k}}{\pi\sqrt[4]{q}}\right) = 2\sum_1^\infty{}_n\ \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+q^n},$$

$$(2)\quad \log\left(\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{k'}.\sqrt[4]{q}}\right) = 2\sum_1^\infty{}_n\ \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+(-1)^nq^n},$$

$$(3)\quad \log\left(\frac{1}{\sqrt{k'}}\right) = 4\sum_1^\infty{}_n\ \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}},$$

$$(4)\quad \log\left(\frac{\pi}{2K'\sqrt{k}}\right) = 4\sum_1^\infty{}_n\ \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{p^{2(2n-1)}}{1-p^{2(2n-1)}},$$

$$(5)\quad \log\left(\frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{k}.\sqrt[4]{p}}\right) = 2\sum_1^\infty{}_n\ \frac{1}{n}\cdot\frac{p^n}{1+(-1)^np^n},$$

$$(6)\quad \log\left(\frac{2\sqrt[4]{p}}{\sqrt{k'}}\right) = -2\sum_1^\infty{}_n(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{p^n}{1+p^n},$$

De même, si dans les formules (1), (2), (3) et (4) du **70** on pose $x = o$, et qu'on remarque que:

$$\theta o = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}},\quad \theta_2 o = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}},\quad \theta_3 o = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

et $\lim_{x=o}\left(\frac{\theta_1 x}{\sin x}\right) = \theta'_1 o = \theta o \,.\, \theta_2 o \,.\, \theta_3 o = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}}$, on trouve:

(7) $$\log\left(\frac{\pi}{2k'K}\right) = 2\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot q^n \cdot \frac{2+q^n}{1-q^{2n}},$$

(8) $$\log\left(\frac{\pi^3\cdot\sqrt{q}}{2kk'K^3}\right) = 6\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

(9) $$\log\left(\frac{kK}{2\pi\sqrt{q}}\right) = -2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{2+(-1)^n}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

(10) $$\log\left(\frac{2K}{\pi}\right) = -2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n} q^n \cdot \frac{2+(-1)^n q^n}{1-q^{2n}}.$$

De ces formules on tire:

(11) $$\log k' = -8\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}},$$

(12) $$\log k = \log 4 + \tfrac{1}{2}\log q + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1+q^n},$$

(13) $$\log K = \log\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}},$$

(14) $$\log k' = \log 4 + \tfrac{1}{2}\log p + 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\cdot\frac{p^n}{1+p^n},$$

(15) $$\log k = -8\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{p^{2n-1}}{1-p^{2(2n-1)}},$$

(16) $$\log K' = \log\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}},$$

(17) $$\log K = \log\frac{\pi}{2} - 4\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}} - 2\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

De ces formules (14) et (12), (15) et (11), (16) et (13) coincident, si l'on y change p en q, donc k en k', K' en K. Les formules pour log k et log k' qu'on peut tirer des formules (7), (8) et (9), jointes à la formule (10), deviennent identiques avec les formules (12) et (11). En comparant les formules (17) et (13) on en tire:

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} + \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{2n}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} = -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}},$$

ou:

(18) $$\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1-(-1)^n q^n} = -\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\cdot\frac{q^n}{1-q^{2n}}.$$

Pour trouver log q développé en série suivant les puissances de k,

on cherche le logarithme de l'équation (1) du paragraphe précédent. De là on trouve:

$$\log q = 2\log(\tfrac{k}{4}) + 4\log\left\{1 + 2(\tfrac{k}{4})^2 + 15(\tfrac{k}{4})^4 + 150(\tfrac{k}{4})^6 + 1707(\tfrac{k}{4})^8 + \ldots\ldots\right\}$$

et de là en développant le dernier terme par la formule:

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

$$(19)\quad \log q = 2\log(\tfrac{k}{4}) + \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{13}{64}k^4 + \tfrac{23}{192}k^6 + \tfrac{2701}{32768}k^8 + \ldots.$$

De là on trouve:

$$K' = -\frac{K}{\pi}\log q = \frac{2K}{\pi}\log(\frac{4}{k}) - \frac{K}{\pi}\left\{\tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{13}{64}k^4 + \tfrac{23}{192}k^6 + \tfrac{2701}{32768}k^8 + \ldots.\right\}$$

et en substituant la valeur de K de la formule (3) du paragraphe précédent:

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + (\tfrac{1}{2})^2k^2 + (\tfrac{1.3}{2.4})^2k^4 + (\tfrac{1.3.5}{2.4.6})^2k^6 + (\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8})^2k^8 + \ldots.$$

on trouvera:

$$(20)\quad K' = (1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{9}{64}k^4 + \tfrac{25}{256}k^6 + \tfrac{1225}{16384}k^8 + \ldots).\log(\tfrac{4}{k}) - \\ - \tfrac{1}{4}k^2(1 + \tfrac{21}{32}k^2 + \tfrac{185}{384}k^4 + \tfrac{18655}{49152}k^6 + \ldots)$$

Si l'on pose ici k' au lieu de k, donc K au lieu de K', on trouvera:

$$(21)\quad K = (1 + \tfrac{1}{4}k'^2 + \tfrac{9}{64}k'^4 + \tfrac{25}{256}k'^6 + \tfrac{1225}{16384}k'^8 + \ldots).\log(\tfrac{4}{k'}) - \\ - \tfrac{1}{4}k'^2(1 + \tfrac{21}{32}k'^2 + \tfrac{185}{384}k'^4 + \tfrac{18655}{49152}k'^6 + \ldots).$$

92. Si dans les formules (9), (10), (11) et (12) du **70** on substitue les valeurs des θfonctions, et qu'on remarque qu'on a en général:

$$l''f(x) = \frac{f''(x)}{f(x)} - \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2$$

on trouvera pour $x = 0$:

$$(1)\quad \frac{-\sum_1^\infty{}_n(-1)^n n^2 q^{n^2}}{1 + 2\sum_1^\infty{}_n(-1)^n q^{n^2}} = \sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1-q^{2n}},$$

$$(2)\quad \frac{-\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.(2n-1)^3.q^{n^2-n}}{\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.(2n-1)q^{n^2-n}} = 8\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}},$$

$$(3)\quad \frac{\sum_1^\infty{}_n(2n-1)^2 q^{n^2-n}}{\sum_1^\infty{}_n q^{n^2-n}} = 1 - 8\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}},$$

$$(4)\quad \frac{\sum_1^\infty{}_n n^2 q^{n^2}}{1 + 2\sum_1^\infty{}_n q^{n^2}} = \sum_1^\infty{}_n(-1)^n \frac{nq^n}{1-q^{2n}}.$$

De la formule (3) on tire encore:

$$(5)\qquad \frac{\sum_1^\infty{}_n (n^2-n)q^{n^2-n}}{\sum_1^\infty{}_n q^{n^2-n}} = -2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n . \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}.$$

93. Des formules du septième et huitième chapitre on peut encore par d'autres substitutions déduire une foule de formule analogues aux formules du 87 et 92. Nous en donneront ici seulement une formules très intéressante due à Mr. Jacobi. Si dans la formule (3) du 62:

$$\theta_1(x) = 2\sqrt[4]{q} . \sin x . \prod_1^\infty{}_n (1-2q^{2n}. \cos 2x + q^{4n})(1-q^{2n}) =$$
$$= -2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} . \sin(2n-1)x,$$

on pose $x = \frac{\pi}{3}$, on trouvera: $2 . \sin x = \sqrt{3}$, $2\cos 2x = -1$, donc:

$$(1-2q^{2n}. \cos 2x + q^{4n})(1-q^{2n}) = (1+q^{2n}+q^{4n})(1-q^{2n}) = 1-q^{6n},$$

et: $\sin(2n-1)x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $= 0$, ou $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$, suivant que $n=3r-2$, $n=3r-1$, ou $n = 3r$, où r est un nombre entier quelconque. Donc on aura:

$$\sum_1^\infty{}_n (-1)^n q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} . \sin(2n-1)x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_1^\infty{}_r (-1)^r q^{\left(\frac{6r-5}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} . \sum_1^\infty{}_r (-1)^r q^{\left(\frac{6r-1}{2}\right)^2}.$$

Mais si l'on pose $r = n+1$ on trouve:

$$\sum_1^\infty{}_r (-1)^r q^{\left(\frac{6r-5}{2}\right)^2} = -\sum_0^\infty{}_n (-1)^n q^{\left(\frac{6n+1}{2}\right)^2},$$

et si l'on pose $r = -n$ on trouve:

$$\sum_1^\infty{}_r (-1)^r q^{\left(\frac{6r-1}{2}\right)^2} = \sum_{-1}^{-\infty}{}_n (-1)^n q^{\left(\frac{6n+1}{2}\right)^2},$$

donc on a:

$$\sum_1^\infty{}_n (-1)^n q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} . \sin(2n-1)x = -\frac{\sqrt{3}}{2} . \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n q^{\left(\frac{6n+1}{2}\right)^2}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule précédente de $\theta_1 x$ on trouve:

$$\sqrt{3}\sqrt[4]{q} . \prod_1^\infty{}_n (1-q^{6n}) = \sqrt{3} . \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n q^{\left(\frac{6n+1}{2}\right)^2} = \sqrt{3} . \sqrt[4]{q} . \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n q^{9n^2+3n}.$$

Si l'on divise ici par $\sqrt{3} . \sqrt[4]{q}$ et qu'on pose q au lieu de q^3, on trouvera:

$$(1)\qquad \prod_1^\infty{}_n (1-q^{2n}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n q^{3n^2+n}$$

ou, puisque la dernière somme ne sera pas changée si l'on change le signe de n:

$$(2)\qquad \prod_1^\infty{}_n (1-q^{2n}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n (-1)^n . q^{3n^2-n}.$$

Mais on a en vertu de la formule (5) du 89:

$$\prod_1^\infty{}_n (1-q^{2n})^3 = \frac{K}{\pi} . \sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}} . \frac{1}{\sqrt[4]{q}}$$

et en vertu de la formule (80) du 86:

$$\frac{K}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{2kk'K}{\pi}} = -\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.(2n-1)q^{\binom{2n-1}{2}^2} = -\sqrt[4]{q}\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.(2n-1)q^{n^2-n}.$$

Donc on aura:

$$(3)\qquad \left\{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n(-1)^n.q^{3n^2\pm n}\right\}^3 = -\sum_1^\infty{}_n(-1)^n.(2n-1)q^{n^2-n}.$$

94. Des formules (40) et (84) du **86** on tire:

$$1+8\sum_1^\infty{}_n\frac{nq^n}{1+(-1)^nq^n} = \left\{1+2\sum_1^\infty{}_nq^{n^2}\right\}^4, \text{ ou:}$$

$$1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\frac{32q^4}{1+q^4}+\ldots = \left\{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots\right\}^4.$$

De cette formule on peut déduire le théorème célèbre de *Fermat* qu'un nombre entier quelconque peut être mis sous la forme d'une somme de quatre carrés. A cet effet il ne s'agit évidemment que de démontrer qu'en développant les fractions du membre gauche de l'équation précédent on obtient une série, qui contient toutes les puissances entières de q; car en développant la quatrième puissance dans le membre droit on trouvera seulement des puissances de q, dont l'exposant est la somme de quatre carrés.

Or on a, si n est un nombre impair:

$$\frac{nq^n}{1+(-1)^nq^n} = \frac{nq^n}{1-q^n} = nq^n+nq^{2n}+nq^{3n}+nq^{4n}+nq^{5n}+\ldots$$

et si n est nombre pair:

$$\frac{nq^n}{1+(-1)^nq^n} = \frac{nq^n}{1+q^n} = nq^n-nq^{2n}+nq^{3n}-nq^{4n}+nq^{5n}-\ldots$$

Donc on aura:

$$\begin{aligned}
\sum_1^\infty{}_n\frac{nq^n}{1+(-1)^nq^n} = {} & q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+q^9+q^{10}+q^{11}+q^{12}+\ldots\\
& +2q^2 \quad -2q^4 \quad +2q^6 \quad -2q^8 \quad +2q^{10} \quad -2q^{12}\ldots.\\
& +3q^3 \quad +3q^6 \quad +3q^9 \quad +3q^{12}\ldots.\\
& +4q^4 \quad -4q^8 \quad +4q^{12}\ldots.\\
& +5q^5 \quad +5q^{10}\ldots\ldots\ldots.\\
& +6q^6 \quad -6q^{12}\ldots.\\
& +7q^7 \quad \ldots.\\
& +8q^8 \quad \ldots.\\
& +9q^9 \quad \ldots.\\
& +10q^{10} \quad \ldots.\\
& +11q^{11} \quad \ldots.\\
& +12q^{12}\ldots.
\end{aligned}$$

$$= q+(1+2)q^2+(1+3)q^3+(1-2+2^2)q^4+(1+5)q^5+(1+2)(1+3)q^6+(1+7)q^7+$$
$$+(1-2\cdot2^2+2^3)q^8+(1+3+9)q^9+(1+2)(1+5)q^{10}+(1+11)q^{11}+(1-2+2^2)(1+3)q^{12}+$$

Or il est facile ici de saisir la forme des coefficients. En effet, soit:

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n} = \sum_1^\infty{}_m A_m q^m.$$

Si m est un nombre impair, dont les facteurs premiers sont:

$m = m'.m''.m'''.\ldots$, on aura évidemment:

$A_m = 1+m'+m''+m'''+\ldots+m'm''+m'm'''+m''m'''+\ldots+m'm''m'''+\ldots$

puisque toute valeur de n qui est un diviseur de m, y compris 1 et m, donc $n = 1, = m', = m'', \ldots = m'm'', \ldots.$ contribuera au terme q^m avec le coefficient: + n.

Si m est de la forme: $m = 2.m'.m''.m'''$, où m', m'', m''' ... sont des nombres premiers impairs, on aura de même:

$A_m = 1+2+m'+m''+m'''+2m'+2m''+2m'''+m'm''+m'm'''+m''m'''+\ldots+$

$+2m'm''+2m'm'''+2m''m'''+m'm''m'''+\ldots+2m'm''m'''+\ldots$

$=(1+2)(1+m'+m''+m'''+\ldots+m'm''+m'm'''+m''m'''+\ldots+m'm''m'''+\ldots).$

Si m est de la forme: $m = 2^2.m'.m''.m'''\ldots$, où m', m'', m''', ... sont des nombres premiers impairs, on aura de même:

$A_m = 1-2+m'+m''+m'''+\ldots+2^2-2m'-2m''-2m'''\ldots+m'm''+m'm'''+m''m'''+\ldots$

$+2^2.m'+2^2m''+2^2m'''+\ldots-2.m'm''-2m'm'''-2m''m'''-\ldots+m'm''m'''+\ldots$

$=(1-2+2^2)(1+m'+m''+m'''+\ldots+m'm''+m'm'''+m''m'''+\ldots+m'm''m'''+\ldots).$

Si m est de la forme: $m = 2^3.m'.m''.m'''\ldots$, où m', m'', m''', ... sont des nombres premiers impairs, on aura de même:

$A_m = (1-2-2^2+2^3)(1+m'+m''+m'''+\ldots+m'm''+m'm'''+m''m'''+\ldots+m'm''m'''+\ldots)$

En général, si $m = 2^r.m'.m''.m'''\ldots$, où r est un nombre entier quelconque, et m', m'', m''', ... des nombres premiers impairs, on aura:

$A_m = (1-2-2^2-2^3\ldots-2^{r-1}+2^r).(1+m'+m''+m'''+\ldots+m'm''+m'm'''+\ldots)$

puisque: $\frac{m}{2^s} = 2^{r-s}.m'.m''.m'''\ldots$, $\frac{m}{2^s.m'} = 2^{r-s}.m''.m'''\ldots$, $\frac{m}{2^s.m''} = 2^{r-s}m'.m'''\ldots$,

$\frac{m}{2^s.m'.m''} = 2^{r-s}.m'''\ldots$ sont des nombres pairs, tant que $s < r$, mais des nombres impairs quand $s = r$.

Maintenant on a:

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{r-1} = 2^r-1,$$

donc: $1-2-2^2-2^3\ldots-2^{r-1}+2^r = 2-(2^r-1)+2^r = 3.$

Donc on aura toujours, si m est un nombre pair, dont les facteurs premiers impairs sont m', m'', m''', ...

$A_m = 3(1+m'+m''+m'''+\ldots+m'm''+m'm'''+m''m'''+\ldots+m'm''m'''+\ldots).$

Si l'on désigne par S_m la somme de tous les facteurs impairs d'un nombre quelconque m, y compris l'unité et le nombre m, s'il est impair, on aura donc pour des valeurs impaires de m: $A_m = S_m$, et pour des valeurs paires de m: $A_m = 3S_m$. Donc on a:

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{nq^n}{1+(-1)^n q^n} = \sum_1^\infty{}_n S_{2n-1} \cdot q^{2n-1} + 3\sum_1^\infty{}_n S_{2n} \cdot q^{2n},$$

$$\{1+2q^2+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots\}^4 = 1 + 8\sum_1^\infty{}_n S_{2n-1} \cdot q^{2n-1} + 24\sum_1^\infty{}_n S_{2n} \cdot q^{2n}.$$

Donc tout nombre entier, 2n—1 ou 2n, peut être mis sous la forme d'une somme de quatre carrés.

Chapitre onzième.

Calcul numérique des fonctions elliptiques.

95. L'illustre Legendre a dans son *Traité des fonctions elliptiques* entrepris le travail immense de calculer la valeur de l'intégrale elliptique. Puisque cette intégrale est une fonction de deux variables, l'amplitude et le module, ces tables sont à double entrée.

Au lieu du module k, Legendre a introduit l'angle dont le module est le sinus. Cet angle est nommé *l'angle du module.* Les tables de Legendre donnent les valeurs de l'intégrale elliptique avec 10 décimales pour tous les degrés de l'angle du module et de l'amplitude. Pour des valeurs imaginaires du module ou de l'amplitude des tables à double entrée ne suffisent plus, et il est donc impossible d'en former des tables. De plus ce n'est pas tant des intégrales elliptiques u, que des fonctions elliptiques, sin am u, cos am u, Δ am u, et des θfonctions, dont on a le plus souvent besoin de connaître les valeurs.

Il existe des tables à simple entrée pour les valeurs du nome, correspondantes aux différentes valeurs de l'angle du module. Mr. *Verhulst* a dans son *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* (Bruxelles 1841) le premier calculé une table à cet usage. Cette table contient les logarithmes vulgaires de la fonction log vulg.$(\frac{1}{q})$, calculés pour tous les angles du module de dixième en dixième de degré, depuis 0^0 jusqu'à 45^0, avec 14 décimales pour les 15 premiers degrés et 12 décimales pour tous les autres. *Jacobi* a dans le tomé 26 du Journal de Crelle (Berlin 1843) donné une table analogue des logarithmes vulgaires de q, calculés pour tous les angles du module, de dixième en dixième de degré, depuis 0^0 jusqu'à 90^0, avec 5 décimales. Enfin Dr. *Meissel* a dans son „Sammlung mathematischer Tafeln" (Iserlohn 1860) donné une table analogue mais plus étendue.

Les séries qui sont développées dans les chapitres précédents, sont le plus souvent d'une convergence tellement grande qu'il n'est pas nécessaire de calculer en avance des tables, qui du reste ne suffisent pas pour des

valeurs imaginaires. Dans le cas d'une convergence moins rapide on peut facilement, à l'aide des formules du chapitre neuvième, les transformer en d'autres séries qui convergeront plus rapidement.

Dans les paragraphes suivants nous donnerons en détail le calcul des fonctions et des intégrales elliptiques ainsi que des fonctions de Jacobi pour des valeurs réelles et imaginaires du module et de l'amplitude. Nous ferons dans ce calcul usage des tables des logarithmes vulgaires avec 7 décimales. Pour distinguer les logarithmes vulgaires des logarithmes népériens, nous désignerons les premiers par Log, tandis que nous continuerons de désigner les derniers par log. On a donc: $\text{Log } N = \log N . \text{Log } e$, ou: $\log N = \frac{\text{Log } N}{\text{Log } e}$.

96. Nous commencerons par le calcul des nomes q et p et par celui des intégrales complètes K et K', quand on connaît le module k, et que celui-ci soit réel et plus petit que l'unité, donc que l'angle du module, α, soit réel.

Si le module k est très petit, on déduira la valeur du nome q à l'aide de la formule (1) du **90**:

$$(1) \qquad \sqrt[4]{q} = \sqrt{\frac{k}{4}}\left\{1 + 2\left(\frac{k}{4}\right)^2 + 15\left(\frac{k}{4}\right)^4 + \ldots\right\},$$

de la quelle on tire:

$$(2) \qquad q = \left(\frac{k}{4}\right)^2\left\{1 + \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{21}{64}k^4 + \ldots\right\} = \tfrac{1}{16}k^2 + \tfrac{1}{32}k^4 + \tfrac{21}{1024}k^6 + \ldots$$

et de là, en remarquant que: $\text{Log}(1+x) = \text{Log } e\,.\,(x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots)$:

$$(3) \qquad \text{Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 2\,\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right) - \tfrac{1}{2}k^2\,\text{Log } e\,(1 + \tfrac{13}{32}k^2 + \ldots).$$

De là, on trouvera p à l'aide de la formule:

$$\log\left(\frac{1}{q}\right).\log\left(\frac{1}{p}\right) = \pi^2, \text{ donc: } \text{Log}\left(\frac{1}{q}\right).\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = (\pi\,\text{Log } e)^2,$$

$$(4) \qquad \text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(\pi\,\text{Log } e)^2}{\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right)} = \frac{(\pi\,\text{Log } e)^2}{2\,\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right)}\left\{1 + \tfrac{1}{4}k^2\,.\,\frac{\text{Log } e}{\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right)} + \ldots\right\}.$$

On trouvera l'intégrale complète K à l'aide de la formule (4) du **88**, ou (1) du **15**:

$$(5) \qquad K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + 2q + 2q^4 + \ldots\right\}^2 = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{9}{64}k^4 + \ldots\right\}$$

et de là l'intégrale complète K' par la formule (7) du **88**:

$$(6) \quad K' = \frac{K}{\pi}.\log\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{K}{\pi}\cdot\frac{\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right)}{\text{Log } e} = \left\{\frac{\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right)}{\text{Log } e} - \tfrac{1}{4}k^2 - \tfrac{13}{128}k^4 - \ldots\right\}.\left\{1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{9}{64}k^4 + \ldots\right\}.$$

Si l'angle du module est plus petit que $0^0\,1'\,30''$, ou le module plus petit que $0{,}0004$, on n'a pas besoin de plus d'un terme. On aura alors:

$$(7)\quad \begin{cases} q = (\frac{k}{4})^2,\ \mathrm{Log}(\frac{1}{q}) = 2\mathrm{Log}(\frac{4}{k}),\ \mathrm{Log}(\frac{1}{p}) = \dfrac{(\pi \mathrm{Log}\, e)^2}{2\mathrm{Log}(\frac{4}{k})}, \\ K = \dfrac{\pi}{2}(1+2q)^2 = \dfrac{\pi}{2}(1+4q) = \dfrac{\pi}{2}(1+\tfrac{1}{4}k^2),\ K' = \dfrac{\mathrm{Log}(\frac{1}{q})}{2\,\mathrm{Log}\, e} = \dfrac{\mathrm{Log}(\frac{4}{k})}{\mathrm{Log}\, e}. \end{cases}$$

Si l'angle du module est plus grand que $0^0\,1'\,30''$, mais plus petit que $1^0 30'$, ou si le module est plus grand que $0{,}0004$, mais plus petit que $0{,}025$, on emploiera pour le calcul du nome q deux termes des formules précédentes, et on aura donc:

$$(8)\quad \begin{cases} q = \dfrac{k^2}{16}(1+\tfrac{1}{2}k^2) = \dfrac{k^2}{16} + \dfrac{k^4}{32},\ \mathrm{Log}(\frac{1}{q}) = 2\,\mathrm{Log}(\frac{4}{k}) - \tfrac{1}{2}k^2 \mathrm{Log}\, e, \\ \mathrm{Log}(\frac{1}{p}) = \dfrac{(\pi \mathrm{Log}\, e)^2}{\mathrm{Log}(\frac{1}{q})} = \dfrac{(\pi \mathrm{Log}\, e)^2}{2\mathrm{Log}(\frac{4}{k})}\left(1+\tfrac{1}{4}k^2 . \dfrac{\mathrm{Log}\, e}{\mathrm{Log}(\frac{4}{k})}\right), \\ K = \dfrac{\pi}{2}(1+2q)^2 = \dfrac{\pi}{2}(1+4q) = \dfrac{\pi}{2}(1+\tfrac{1}{4}k^2) \\ K' = \tfrac{1}{2} . \dfrac{\mathrm{Log}(\frac{1}{q})}{\mathrm{Log}\, e} . (1+4q) = \left\{\dfrac{\mathrm{Log}(\frac{4}{k})}{\mathrm{Log}\, e} - \tfrac{1}{4}k^2\right\} . \left\{1+\tfrac{1}{4}k^2\right\}. \end{cases}$$

Si l'angle du module surpasse $1^0 30'$, étant plus petit que 45^0, ou si le module surpasse $0{,}025$, étant plus petit que $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ 106\ 78$, on emploiera les transformations du chapitre neuvième. Si l'angle du module est plus petit que 18^0, on emploiera les formules (2) du 78:

$$k_2 = \frac{1-k'}{1+k'},\ K_2 = K . \frac{1+k'}{2}.$$

Si l'on pose en général $k_n = \sin \alpha_n$, on aura alors:

$$k_2 = \sin \alpha_2 = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha,\ K_2 = K . \frac{1+\cos\alpha}{2} = K . \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha.$$

De là on trouve: $q^2 = \frac{1}{16}k_2^2(1+\frac{1}{2}k_2^2)$, donc:

$$(9)\quad \begin{cases} q = \frac{1}{4}k_2(1+\frac{1}{4}k_2^2) = \frac{1}{4}\mathrm{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha(1+\frac{1}{4}\mathrm{tang}^4 \frac{1}{2}\alpha), \\ \mathrm{Log}\, q = 2\,\mathrm{Log}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha - \mathrm{Log}\, 4 + \tfrac{1}{4}\mathrm{Log}\, e . \mathrm{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha, \\ K = \dfrac{K_2}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{4}k_2^2)}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{4}\mathrm{tang}^4 \frac{1}{2}\alpha)}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}, \\ \mathrm{Log}\, K = \mathrm{Log}(\frac{\pi}{2}) - 2\,\mathrm{Log}\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{4}\mathrm{Log}\, e . \mathrm{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha. \end{cases}$$

Si l'angle du module est plus grand que 18^0, il faudra employer cette transformation deux ou trois fois de suite:

$$k_2 = \sin\alpha_2 = \mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha, k_4 = \sin\alpha_4 = \mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2, k_8 = \sin\alpha_8 = \mathrm{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_4,$$
$$K_2 = K . \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha,\ K_4 = K_2 . \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2,\ K_8 = K_4 . \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha_4,$$

De là on trouvera:

$q^4 = \frac{1}{16}k_4^2(1+\frac{1}{2}k_4^2) = \frac{1}{16}\mathrm{tang}^4 \frac{1}{2}\alpha_2(1+\frac{1}{2}\mathrm{tang}^4 \frac{1}{2}\alpha_2)$, donc:

$$(10)\quad \begin{cases} \sin\alpha_2 = \tang^2 \frac{1}{2}\alpha,\ q = \frac{1}{2}\tang\frac{1}{2}\alpha_2(1+\frac{1}{8}\tang^4\frac{1}{2}\alpha_2), \\ \Log q = \Log\tang\frac{1}{2}\alpha_2 - \Log 2 + \frac{1}{8}\Log e\,.\,\tang^4\frac{1}{2}\alpha_2, \\ K = \dfrac{K_4}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos^2\frac{1}{2}\alpha_2} = \dfrac{\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{4}k_4^2)}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos^2\frac{1}{2}\alpha_2} = \dfrac{\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{4}\tang^4\frac{1}{2}\alpha_2)}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos^2\frac{1}{2}\alpha_2}, \\ \Log K = \Log(\frac{\pi}{2}) - 2(\Log\cos\frac{1}{2}\alpha + \Log\cos\frac{1}{2}\alpha_2) + \frac{1}{4}\Log e\,.\,\tang^4\frac{1}{2}\alpha_2 \end{cases}$$

ou bien: $q^8 = \frac{1}{16}k_8^2 = \frac{1}{16}\tang^4\frac{1}{2}\alpha_4$, donc:

$$(11)\quad \begin{cases} \sin\alpha_2 = \tang^2\frac{1}{2}\alpha,\ \sin\alpha_4 = \tang^2\frac{1}{2}\alpha_2,\ q = \sqrt{\frac{1}{2}\tang\frac{1}{2}\alpha_4}, \\ \Log q = \frac{1}{2}\Log\tang\frac{1}{2}\alpha_4 - \frac{1}{2}\Log 2. \\ K = \dfrac{K_8}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos^2\frac{1}{2}\alpha_2\,.\,\cos^2\frac{1}{2}\alpha_4} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos^2\frac{1}{2}\alpha_2\,.\,\cos^2\frac{1}{2}\alpha_4} \\ \Log K = \Log\frac{\pi}{2} - 2(\Log\cos\frac{1}{2}\alpha + \Log\cos\frac{1}{2}\alpha_2 + \Log\cos\frac{1}{2}\alpha_4). \end{cases}$$

Dans le dernier cas, si l'angle du module est plus grand que 18^0, on peut aussi avec avantage employer les formules (6) du 78:

$$k_4 = \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2,\ K_4 = \tfrac{1}{4}K(1+\sqrt{k'})^2.$$

Si l'on pose alors: $\sqrt{k'} = \sqrt{\cos\alpha} = \cos\beta$, on aura:

$$k_4 = \sin\alpha_4 = \left(\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}\right)^2 = \tang^4\tfrac{1}{2}\beta,\ K_4 = K\,.\left(\frac{1+\cos\beta}{2}\right)^2 = K\,.\cos^4\tfrac{1}{2}\beta.$$

De là on trouve:

$$q^4 = \tfrac{1}{16}k_4^2(1+\tfrac{1}{2}k_4^2) = \tfrac{1}{16}\tang^8\tfrac{1}{2}\beta\,(1+\tfrac{1}{2}\tang^8\tfrac{1}{2}\beta),\ \text{donc:}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \cos\beta = \sqrt{\cos\alpha},\ q = \frac{1}{2}\tang^2\frac{1}{2}\beta(1+\frac{1}{8}\tang^8\frac{1}{2}\beta), \\ \Log q = 2\Log\tang\frac{1}{2}\beta - \Log 2 + \frac{1}{8}\Log e\,.\,\tang^8\frac{1}{2}\beta. \\ K = \dfrac{K_4}{\cos^4\frac{1}{2}\beta} = \dfrac{\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{4}k_4^2)}{\cos^4\frac{1}{2}\beta} = \dfrac{\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{4}\tang^8\frac{1}{2}\beta)}{\cos^4\frac{1}{2}\beta}, \\ \Log K = \Log\frac{\pi}{2} - 4\Log\cos\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\Log e\,.\,\tang^8\frac{1}{2}\beta. \end{cases}$$

Après avoir trouvé Log K et Log q, on trouvera:

$$(13)\quad \Log\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(\pi\Log e)^2}{\Log\left(\frac{1}{q}\right)},\ K' = \frac{K}{\pi}\,.\,\frac{\Log\left(\frac{1}{q}\right)}{\Log e}.$$

Si enfin l'angle du module est plus grand que 45^0, ou le module plus grand que $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,106\,78$, on substituera l'angle du module complémentaire k', qui sera alors plus petit que 45^0, et on en calculera p et K', et de là q et K.

Exemple 1. Soit $\alpha = 1'$, $k = \sin 1' = 0{,}000\,290\,888$. On a alors:

$q = \frac{k^2}{16}$;

$\Log k = 0{,}463\,7261 - 4$

$\Log k^2 = 0{,}927\,4522 - 8$

$\Log 16 = 1{,}204\,1200$

$\Log q = 0{,}723\,3322 - 9$

$q = 0{,}000\,000\,005\,288\,496$

$$\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(\pi \text{Log e})^2}{\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right)};\quad \text{Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 8{,}276\ 6678$$

$$\text{Log Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 0{,}917\ 8555$$

$$2\ \text{Log}(\pi \text{Log e}) = 0{,}269\ 8684$$

$$\text{Log Log}\left(\frac{1}{p}\right) = 0{,}352\ 0129 - 1$$

$$\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = 0{,}224\ 9121$$

$$\text{Log } p = 0{,}775\ 0879 - 1.$$

$$p = 0{,}595\ 7827.$$

$$K = \tfrac{\pi}{2}(1 + 4q);\quad 1 + 4q = 1{,}000\ 000\ 021$$

$$\tfrac{\pi}{2} = 1{,}570\ 796\ 327$$

$$K = 1{,}570\ 796\ 359$$

$$K' = \frac{\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right)}{2\,\text{Log e}};\quad \text{Log Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 0{,}917\ 8555$$

$$\text{Log}\,(2\,\text{Log e}) = 0{,}938\ 8143 - 1$$

$$\text{Log } K' = 0.979\ 0412$$

$$K' = 9{,}528\ 865.$$

Exemple 2. Soit $\alpha = 89^0\,59'$, $k = \sin 89^0\,59' = 0{,}999\ 999\ 96$.

On a alors:

$$k' = \cos\alpha = \sin 1' = 0{,}000\ 290\ 888,$$

$$p = \frac{k'^2}{16} = 0{,}000\ 000\ 005\ 288\ 496,$$

$$\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{(\pi \text{Log e})^2}{\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right)} = 0{,}224\ 9121,$$

$$q = 0{,}595\ 7827,$$

$$K' = \tfrac{\pi}{2}(1 + 4p) = 1{,}570\ 796\ 359,$$

$$K = \frac{\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right)}{2\,\text{Log e}} = 9{,}528\ 865.$$

Exemple 3. Soit $k = 0{,}000\ 4$. On a alors:

$$q = \left(\frac{k}{4}\right)^2 = 0{,}000\ 000\ 01,$$

$$\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(\pi \text{Log e})^2}{2\,\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right)},\quad \text{Log}\left(\frac{4}{k}\right) = 4{,}000\ 000$$

$$\text{Log Log}\left(\frac{4}{k}\right) = 0{,}602\ 0600$$

$$\text{Log } 2 = 0{,}301\ 0300$$

$$\text{Log}\,(2\,\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right)) = 0{,}903\ 0900$$

$$2\,\text{Log}\,(\pi \text{Log e}) = 0{,}269\ 8684$$

$$\text{Log Log}\left(\frac{1}{p}\right) = 0{,}366\ 7784 - 1$$

$$\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = 0{,}232\ 6904$$
$$\text{Log } p = 0{,}767\ 3096 - 1$$
$$p = 0{,}585\ 2072$$

$K = \frac{\pi}{2}(1 + \frac{1}{4}k^2)$; $\frac{\pi}{2} = 1{,}570\ 796\ 327$
$1 + \frac{1}{4}k^2 = 1{,}000\ 000\ 04$
$K = 1{,}570\ 796\ 39$

$K' = \dfrac{\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right)}{\text{Log } e}$; $\text{Log Log}\left(\frac{4}{k}\right) = 0{,}602\ 0600$
$\text{Log Log } e = 0{,}637\ 7843 - 1$
$\text{Log } K' = 0{,}964\ 2757$
$K' = 9{,}210\ 3404$

Exemple 4. Soit $\alpha = 1^0$, $k = \sin 1^0 = 0{,}017\ 452\ 406$. On a alors:

$q = \dfrac{k^2}{16}(1 + \frac{1}{2}k^2)$; $\text{Log } k = 0{,}241\ 8553 - 2$
$\text{Log } k^2 = 0{,}483\ 7106 - 4$
$\text{Log } 16 = 1{,}204\ 1200$
$\text{Log}\dfrac{k^2}{16} = 0{,}279\ 5906 - 5$
$\dfrac{k^2}{16} = 0{,}000\ 019\ 036\ 654$
$1 + \frac{1}{2}k^2 = 1{,}000\ 152\ 3$
$q = 0{,}000\ 019\ 039\ 553$

$\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = \dfrac{(\pi \text{Log } e)^2}{\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right)}$; $\text{Log } q = 0{,}279\ 6567 - 5$
$\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 4{,}720\ 3433$
$\text{Log Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 0{,}673\ 9736$
$2 \text{ Log}(\pi \text{ Log } e) = 0{,}269\ 8684$
$\text{Log Log}\left(\frac{1}{p}\right) = 0{,}595\ 8948 - 1$
$\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = 0{,}394\ 3617$
$\text{Log } p = 0{,}605\ 6383 - 1$
$p = 0{,}403\ 309\ 35$

$K = \frac{\pi}{2}(1 + 4q)$; $\frac{\pi}{2} = 1{,}570\ 796\ 327$
$1 + 4q = 1{,}000\ 076\ 16$
$K = 1{,}570\ 915\ 96$

$K' = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right)}{\text{Log } e} \cdot (1 + 4q)$; $\text{Log Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 0{,}673\ 9736$
$\text{Log Log } e = 0{,}637\ 7843 - 1$

$$\text{Log}\left(\frac{\text{Log}(\frac{1}{q})}{\text{Log e}}\right) = 1,036\ 1893$$

$$\frac{\text{Log}(\frac{1}{q})}{\text{Log e}} = 10,868\ 992$$

$$1 + 4q = 1,000\ 076\ 16$$

$$2K' = 10,869\ 820$$

$$K' = 5,434\ 910$$

Exemple 5. Soit $\alpha = 89^0$, $k = \sin 89^0 = 0,999\ 8477$. On a alors:

$$k' = \cos\alpha = \sin 1^0 = 0,017\ 452\ 406,$$

$$p = \frac{k'^2}{16}(1 + \tfrac{1}{2}k'^2) = 0,000\ 019\ 039\ 553,$$

$$\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{(\pi \text{Log e})^2}{\text{Log}(\frac{1}{p})} = 0,394\ 3617,$$

$$q = 0,403\ 309\ 35$$

$$K' = \tfrac{\pi}{2}(1 + 4p) = 1,570\ 915\ 96$$

$$K = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\text{Log}(\frac{1}{p})}{\text{Log e}} \cdot (1 + 4p) = 5,434\ 910.$$

Exemple 6. Soit $k = 0,02$. On a alors:

$$q = \frac{k^2}{16} + \frac{k^4}{32};\quad \frac{k^2}{16} = 0,000\ 025\ 000$$

$$\frac{k^4}{32} = 0,000\ 000\ 005$$

$$q = 0,000\ 025\ 005$$

$$\text{Log}(\tfrac{1}{q}) - 2\,\text{Log}(\tfrac{4}{k}) - \tfrac{1}{2}k^2 \cdot \text{Log e};\ \text{Log}(\tfrac{4}{k}) = 2,301\ 0300$$

$$2\,\text{Log}(\tfrac{4}{k}) = 4,602\ 0600$$

$$\text{Log e} = 0,434\ 2945,\ \tfrac{1}{2}k^2\,\text{Log e} = 0,000\ 0869$$

$$\text{Log}(\tfrac{1}{q}) = 4,601\ 9731$$

$$\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(\pi \text{Log e})^2}{\text{Log}(\frac{1}{q})};\ 2\,\text{Log}(\pi \text{Log e}) = 0,269\ 8684$$

$$\text{Log Log}(\tfrac{1}{q}) = 0,662\ 9441.$$

$$\text{Log Log}(\tfrac{1}{p}) = 0,606\ 9243 - 1.$$

$$\text{Log}(\tfrac{1}{p}) = 0,404\ 5054$$

$$\text{Log } p = 0,595\ 4946 - 1$$

$$p = 0,393\ 9985$$

$$K = \tfrac{\pi}{2}(1 + \tfrac{1}{4}k^2);\ \tfrac{\pi}{2} = 1,570\ 7963$$

$$1 + \tfrac{1}{4}k^2 = 1,000\ 1$$

$$K = 1,570\ 9534$$

$$K' = \left\{\frac{\text{Log}(\frac{4}{k})}{\text{Log e}} - \tfrac{1}{4}k^2\right\} \cdot \left\{1 + \tfrac{1}{4}k^2\right\};\ \text{Log}(\tfrac{4}{k}) = 2,301\ 0300$$

$$\text{Log Log}\left(\frac{4}{k}\right) = 0{,}361\ 9223$$
$$\text{Log Log e} = 0{,}637\ 7843 - 1.$$
$$\text{Log}\left(\frac{\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right)}{\text{Log e}}\right) = 0{,}724\ 1380$$
$$\frac{\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right)}{\text{Log e}} = 5{,}298\ 318$$
$$\tfrac{1}{4}k^2 = 0{,}000\ 100$$
$$\frac{\text{Log}\left(\frac{4}{k}\right)}{\text{Log e}} - \tfrac{1}{4}k^2 = 5{,}298\ 218$$
$$1 + \tfrac{1}{4}k^2 = 1{,}000\ 1$$
$$K' = 5{,}298\ 748$$

Exemple 7. Soit $\alpha = 15^0$, $k = \sin 15^0 = 0{,}258\ 8190$. On a alors:

$$\text{Log } q = 2\,\text{Log tang } \tfrac{1}{2}\alpha - \text{Log } 4 + \tfrac{1}{4}\,\text{Log e} \,.\, \text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha.$$
$$\text{Log tang } \tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}119\ 4291 - 1$$
$$\text{Log tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}477\ 7164 - 4$$
$$\text{Log } (\tfrac{1}{4}\,\text{Log e}) = 0{,}0035\ 7243 - 1$$
$$\text{Log } (\tfrac{1}{4}\,\text{Log e} \,.\, \text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha) = 0{,}513\ 4407 - 5$$
$$\tfrac{1}{4}\,\text{Log e} \,.\, \text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}000\ 0326$$
$$2\,\text{Log tang } \tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}238\ 8582 - 2$$
$$\text{Log } 4q = 0{,}238\ 8908 - 2$$
$$\text{Log } 4 = 0{,}602\ 0600$$
$$\text{Log } q = 0{,}636\ 8308 - 3$$
$$q = 0{,}004\ 333\ 420$$

$$\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(\pi\,\text{Log e})^2}{\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right)}; \quad \text{Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 2{,}363\ 1692$$
$$\text{Log Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 0{,}373\ 4948$$
$$2\,\text{Log}\,(\pi\,\text{Log e}) = 0{,}269\ 8684$$
$$\text{Log Log}\left(\frac{1}{p}\right) = 0{,}896\ 3736 - 1$$
$$\text{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = 0{,}787\ 7231$$
$$\text{Log } p = 0{,}212\ 2769 - 1$$
$$p = 0{,}163\ 0335$$

$$\text{Log } K = \text{Log}\,\frac{\pi}{2} - 2\,\text{Log cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{4}\,\text{Log e} \,.\, \text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha.$$
$$\tfrac{1}{4}\,\text{Log e} \,.\, \text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}000\ 0326$$
$$\text{Log}\,\frac{\pi}{2} = 0{,}196\ 1199$$
$$\text{Log}\,(\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, K) = 0{,}196\ 1525$$
$$\text{Log cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}996\ 2686 - 1, 2\,\text{Log cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}992\ 5372 - 1$$
$$\text{Log } K = 0{,}203\ 6153$$
$$K = 1{,}598\ 142$$

$$K' = \frac{K}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{Log}(\frac{1}{q})}{\operatorname{Log} e}; \quad \operatorname{Log} K = 0{,}203\ 6153$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log}(\tfrac{1}{q}) = 0{,}373\ 4948$$

$$\operatorname{Log}(K \operatorname{Log}(\tfrac{1}{q})) = 0{,}577\ 1101$$

$$\operatorname{Log}(\pi \operatorname{Log} e) = 0{,}134\ 9342$$

$$\operatorname{Log} K' = 0{,}442\ 1759$$

$$K' = 2{,}768\ 063$$

Exemple 8. Soit $\alpha = 75^0$, $k = \sin 75^0 = 0{,}965\ 9258$. On a alors: $k' = \sin(90^0 - \alpha)$, $\operatorname{Log} p = 2\operatorname{Log}\operatorname{tang}(45^0 - \frac{1}{2}\alpha) - \operatorname{Log} 4 + \frac{1}{4}\operatorname{Log} e \cdot \operatorname{tang}^4(45^0 - \frac{1}{2}\alpha)$.

$$\operatorname{Log} p = 0{,}636\ 8308 - 3, \quad p = 0{,}004\ 333\ 420;$$

$$\operatorname{Log}(\frac{1}{q}) = \frac{(\pi \operatorname{Log} e)^2}{\operatorname{Log}(\frac{1}{p})}, \quad \operatorname{Log} q = 0{,}212\ 2769 - 1, \quad q = 0{,}163\ 0335;$$

$$\operatorname{Log} K' = \operatorname{Log}\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Log}\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha) + \tfrac{1}{4}\operatorname{Log} e \cdot \operatorname{tang}^4(45^0 - \tfrac{1}{2}\alpha),$$

$$\operatorname{Log} K' = 0{,}203\ 6153, \quad K' = 1{,}598\ 142;$$

$$K = \frac{K'}{\pi} \cdot \frac{\operatorname{Log}(\frac{1}{p})}{\operatorname{Log} e}; \quad \operatorname{Log} K = 0{,}442\ 1759, \quad K = 2{,}768\ 063.$$

Exemple 9. Soit $\alpha = 30^0$, $k = \sin 30^0 = 0{,}5$. On a alors, si l'on emploie les formules (10):

$\sin \alpha_2 = \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha$; $\operatorname{Log}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = 0{,}428\ 0525 - 1$

$$\operatorname{Log}\sin\alpha_2 = 0{,}856\ 1050 - 2$$

$$\alpha_2 = 4^0 7' 1'',904; \quad \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 2^0 3' 30'',952.$$

$\operatorname{Log} q = \operatorname{Log}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha_2 - \operatorname{Log} 2 + \frac{1}{8}\operatorname{Log} e \cdot \operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\alpha_2$;

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha_2 = 0{,}555\ 6358 - 2$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\alpha_2 = 0{,}222\ 5432 - 6$$

$$\operatorname{Log}(\tfrac{1}{8}\operatorname{Log} e) = 0{,}734\ 6943 - 2$$

$$\operatorname{Log}(\tfrac{1}{8}\operatorname{Log} e \cdot \operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\alpha_2) = 0{,}957\ 2375 - 8$$

$$\tfrac{1}{8}\operatorname{Log} e \cdot \operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}\alpha_2 = 0{,}000\ 0001$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha_2 = 0{,}555\ 6358 - 2$$

$$\operatorname{Log}(2q) = 0{,}555\ 6359 - 2$$

$$\operatorname{Log} 2 = 0{,}301\ 0300$$

$$\operatorname{Log} q = 0{,}254\ 6059 - 2$$

$$q = 0{,}017\ 97239$$

$$\operatorname{Log}(\frac{1}{p}) = \frac{(\pi \operatorname{Log} e)^2}{\operatorname{Log}(\frac{1}{q})}; \quad \operatorname{Log}(\frac{1}{q}) = 1{,}745\ 3941$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log}(\tfrac{1}{q}) = 0{,}241\ 8935$$

$$2\operatorname{Log}(\pi \operatorname{Log} e) = 0{,}269\ 8684$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log}(\tfrac{1}{p}) = 0{,}027\ 9749$$

$$\text{Log}\,\frac{1}{p} = 1,066\ 5343$$
$$\text{Log}\ p = \underline{0,933\ 4657} - 2$$
$$p = \underline{0,085\ 795\ 74}$$

$$\text{Log}\,K = \text{Log}\,\frac{\pi}{2} - 2\,(\text{Log cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha + \text{Log cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha_2) + \tfrac{1}{4}\,\text{Log e}\,.\,\text{tang}^4\,\tfrac{1}{2}\alpha_2;$$
$$\tfrac{1}{4}\,\text{Log e}\,.\,\text{tang}^4\,\tfrac{1}{2}\alpha_2 = 0,000\ 0002$$
$$\text{Log}\,(\tfrac{\pi}{2}) = \underline{0,196\ 1199}$$
$$\text{Log}\,(\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha_2\,.\,K) = 0,196\ 1201$$
$$\text{Log cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha = 0,984\ 9438-1$$
$$\text{Log cos}\,\tfrac{1}{2}\alpha_2 = \underline{0,999\ 7196-1}$$
$$\text{Log}\,(\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2) = 0,984\ 6634-1;\quad 2\,\text{Log}\,(\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2) = \underline{0,969\ 3268-1}$$
$$\text{Log}\,K = \underline{0,226\ 7933}$$
$$K = \underline{1,685\ 750}$$

$$K' = \frac{K}{\pi}\cdot\frac{\text{Log}(\frac{1}{q})}{\text{Log e}};\quad \text{Log}\,K = 0,226\ 7933$$
$$\text{Log Log}\,(\tfrac{1}{q}) = 0,241\ 8935$$
$$\text{Log}\,(K\,.\,\text{Log}\,(\tfrac{1}{q})) = 0,468\ 6868$$
$$\text{Log}\,(\pi\,\text{Log e}) = \underline{0,134\ 9342}$$
$$\text{Log}\,K' = \underline{0,333\ 7526}$$
$$K' = \underline{2,156\ 515}.$$

Si l'on veut employer les formules (12) on trouvera:

$$\cos\,\beta = \sqrt{\cos\,\alpha};\quad \text{Log cos}\,\alpha = \underline{0,937\ 5306 - 1}$$
$$\text{Log cos}\,\beta = \underline{0,968\ 7653 - 1}$$
$$\beta = \underline{21^0 28' 14,_6'',\ \tfrac{1}{2}\beta = 10^0 44' 7,_3''}$$

$$\text{Log}\,q = 2\,\text{Log tang}\,\tfrac{1}{2}\beta - \text{Log}\,2 + \tfrac{1}{8}\,\text{Log e}\,.\,\text{tang}^8\,\tfrac{1}{2}\beta.$$
$$\text{Log tang}\,\tfrac{1}{2}\beta = \underline{0,277\ 8182 - 1}$$
$$\text{Log tang}^8\,\tfrac{1}{2}\beta = 0,222\ 5456 - 6$$
$$\text{Log}\,(\tfrac{1}{8}\,\text{Log e}) = \underline{0,734\ 6943 - 2}$$
$$\text{Log}\,(\tfrac{1}{8}\,\text{Log e}\,.\,\text{tang}^8\,\tfrac{1}{2}\beta) = 0,957\ 2399 - 8$$
$$\tfrac{1}{8}\,\text{Log e}\,.\,\text{tang}^8\,\tfrac{1}{2}\beta = 0,000\ 0001$$
$$2\,\text{Log tang}\,\tfrac{1}{2}\beta = \underline{0,555\ 6364 - 2}$$
$$\text{Log}\,(2q) = 0,555\ 6365 - 2$$
$$\text{Log}\,2 = \underline{0,301\ 0300}$$
$$\text{Log}\,q = \underline{0,254\ 6065 - 2}$$
$$q = \underline{0,017\ 972\ 42}$$

Cette valeur de q diffère de celle trouvée plus haut de 3 dans la dernière décimale, ce qui tient à l'emploi du cosinus pour trouver l'angle β. La valeur trouvée plus haut est plus exacte.

$$\text{Log } K = \text{Log } (\tfrac{\pi}{2}) - 4 \text{ Log cos } \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{4} \text{ Log e . tang}^8 \tfrac{1}{2}\beta;$$

$$\tfrac{1}{4} \text{ Log e . tang}^8 \tfrac{1}{2}\beta = 0,000\ 0002$$

$$\text{Log } (\tfrac{\pi}{2}) = 0,196\ 1199$$

$$\text{Log } (\cos^4 \tfrac{1}{2}\beta \,.\, K) = 0,196\ 1201$$

$$\text{Log cos } \tfrac{1}{2}\beta = 0,992\ 3517 - 1, 4 \text{ Log cos } \tfrac{1}{2}\beta = 0,969\ 3268 - 1$$

$$\text{Log } K = 0,226\ 7933$$

$$K = 1,685\ 751.$$

Exemple 10. Soit $\alpha = 45^0$. On a alors $k^2 = k'^2 = 0,5$. Donc on aura aussi $K = K'$, $q = p = e^{-\pi}$, $\text{Log } (\frac{1}{q}) = \text{Log } (\frac{1}{p}) = \pi \text{ Log e}$.

$\text{Log}(\pi \text{Log e}) = 0,1349342$, $\text{Log } (\frac{1}{q}) = \text{Log } (\frac{1}{p}) = 1,364\ 3764$

$$\text{Log } q = \text{Log } p = 0,635\ 6236 - 2$$

$$q = p = 0,043\ 213\ 91$$

Les formules (11) donnent alors:

$$\sin \alpha_2 = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha; \quad \text{Log tang } \tfrac{1}{2}\alpha = 0,617\ 2243 - 1$$

$$\text{Log sin } \alpha_2 = 0,234\ 4486 - 1$$

$$\alpha_2 = 9^0 52' 45'',41; \quad \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 4^0 56' 22'',705$$

$$\sin \alpha_4 = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2; \quad \text{Log tang } \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 0,936\ 6505 - 2$$

$$\text{Log sin } \alpha_4 = 0,873\ 3010 - 3$$

$$\alpha_4 = 0^0 25' 40'',743; \quad \tfrac{1}{2}\alpha_4 = 0^0 12' 50'',371$$

$$K = K' = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos^2 \frac{1}{2}\alpha_2 \,.\, \cos^2 \frac{1}{2}\alpha_4}; \quad \text{Log cos } \tfrac{1}{2}\alpha = 0,965\ 6153 - 1$$

$$\text{Log cos } \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 0,998\ 3840 - 1$$

$$\text{Log cos } \tfrac{1}{2}\alpha_4 = 0,999\ 9970 - 1$$

$$\text{Log } (\cos \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\alpha_2 \,.\, \cos \tfrac{1}{2}\alpha_4) = 0,963\ 9963 - 1$$

$$\text{Log } (\cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2 \,.\, \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha_4) = 0,927\ 9926 - 1$$

$$\text{Log } (\tfrac{\pi}{2}) = 0,196\ 1199$$

$$\text{Log } K = \text{Log } K' = 0,268\ 1273$$

$$K = K' = 1,854\ 075$$

La table suivante donne les valeurs de $\text{Log } (\frac{1}{q})$, $\text{Log } (\frac{1}{p})$, q, p, K et K' pour tous les dégrés de l'angle du module depuis 0^0 jusqu'à 45^0:

α	$\text{Log } (\frac{1}{q})$	$\text{Log } (\frac{1}{p})$	q	p	K	K'
0^0	∞	0,00000	0,000 0000	1,000 00	1,570 7963	∞
1^0	4,72034	0,39436	0,000 01904	0,403 31	1,570 9160	5,434 909
2^0	4,11822	0,45202	0,000 07617	0,353 17	1,571 2750	4,742 717
3^0	3,76592	0,49431	0,000 17143	0,320 40	1,571 8736	4,338 654
4^0	3,51589	0,52946	0,000 30487	0,295 49	1,572 7124	4,052 752

α	$\mathrm{Log}\left(\frac{1}{q}\right)$	$\mathrm{Log}\left(\frac{1}{p}\right)$	q	p	K	K'
5°	3,32187	0,56038	0,000 47657	0,275 18	1,573 7921	3,831 7420
6°	3,16327	0,58848	0,000 68664	0,257 94	1,575 1136	3,651 8560
7°	3,02909	0,61455	0,000 93521	0,242 91	1,576 6780	3,500 4225
8°	2,91277	0,63909	0,001 22245	0,229 57	1,578 4866	3,369 8680
9°	2,81009	0,66244	0,001 5485	0,217 55	1,580 5409	3,255 3029
10°	2,71815	0,68485	0,001 9136	0,206 61	1,582 8428	3,153 3853
11°	2,63490	0,70649	0,002 3179	0,196 567	1,585 3942	3,061 7286
12°	2,55881	0,72750	0,002 7618	0,187 284	1,588 1972	2,978 5690
13°	2,48872	0,74798	0,003 2455	0,178 657	1,591 2544	2,902 5649
14°	2,42375	0,76804	0,003 7692	0,170 594	1,594 5683	2,832 6726
15°	2,36317	0,78772	0,004 3334	0,163 034	1,598 1420	2,768 0631
16°	2,30641	0,80711	0,004 9384	0,155 916	1,601 9785	2,708 0676
17°	2,25301	0,82624	0,005 5846	0,149 197	1,606 0813	2,652 1380
18°	2,20257	0,84516	0,006 2723	0,142 837	1,610 4542	2,599 8197
19°	2,15476	0,86391	0,007 0023	0,136 801	1,615 1009	2,550 7314
20°	2,10932	0,88252	0,007 7746	0,131 063	1,620 0259	2,504 5501
21°	2,06600	0,90103	0,008 5901	0,125 594	1,625 2337	2,460 9995
22°	2,02460	0,91945	0,009 4493	0,120 379	1,630 7291	2,419 8417
23°	1,98495	0,93782	0,010 3526	0,115 393	1,636 3174	2,380 8702
24°	1,94689	0,95615	0,011 3008	0,110 624	1,642 6041	2,343 9047
25°	1,91029	0,97447	0,012 2945	0,106 055	1,648 9952	2,308 7868
26°	1,87502	0,99280	0,013 3346	0,101 672	1,655 6969	2,275 3764
27°	1,84099	1,01115	0,014 4215	0,097 465	1,662 7160	2,243 5493
28°	1,80810	1,02955	0,015 556	0,093 422	1,670 0594	2,213 1947
29°	1,77626	1,04800	0,016 739	0,089 537	1,677 7349	2,184 2132
30°	1,74539	1,06653	0,017 973	0,085 797	1,685 7504	2,156 5156
31°	1,71544	1,08516	0,019 256	0,082 194	1,694 1144	2,130 0214
32°	1,68633	1,10389	0,020 591	0,078 725	1,702 8359	2,104 6577
33°	1,65801	1,12274	0,021 978	0,075 381	1,711 9247	2,080 3582
34°	1,63043	1,14174	0,023 419	0,072 154	1,721 3908	2,057 0623
35°	1,60354	1,16088	0,024 915	0,069 043	1,731 2452	2,034 7153
36°	1,57729	1,18021	0,026 467	0,066 037	1,741 4992	2,013 2666
37°	1,55165	1,19970	0,028 077	0,063 139	1,752 1652	1,992 6698
38°	1,52658	1,21941	0,029 745	0,060 338	1,763 2562	1,972 8823
39°	1,50204	1,23932	0,031 475	0,057 634	1,774 7859	1,953 8648
40°	1,47801	1,25948	0,033 265	0,055 020	1,786 7691	1,935 5811

α	$\mathrm{Log}(\frac{1}{q})$	$\mathrm{Log}(\frac{1}{p})$	q	p	K	K'
41^0	1,45445	1,27989	0,035 120	0,052 494	1,799 2215	1,917 9975
42^0	1,43133	1,30056	0,037 040	0,050 054	1,812 1599	1,901 0830
43^0	1,40863	1,32152	0,039 027	0,047 696	1,825 6019	1,884 8087
44^0	1,38632	1,34273	0,041 085	0,045 417	1,839 5667	1,869 1475
45^0	1,36438	1,36438	0,043 214	0,043 214	1,854 0747	1,854 0747

97. Si le module k est réel, mais plus grand que l'unité, on emploiera la transformation du **84**. Si l'on pose alors $k = \frac{1}{\mathfrak{h}}$, où $\mathfrak{h} < 1$, et qu'on désigne par $\mathfrak{p}$ le nome complémentaire, par $\mathfrak{H}$, et $\mathfrak{H}'$ les intégrales complètes correspondantes au module $\mathfrak{h}$, on a en vertu du **84**:

$$(1)\quad \begin{cases} p = -\mathfrak{p},\ K = \frac{1}{k}(\mathfrak{H} + i\mathfrak{H}'),\ K' = \frac{1}{k}.\mathfrak{H}' \\ q = e^{\frac{-\pi\mathfrak{H}'(\mathfrak{H}-i\mathfrak{H}')}{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}} = e^{\frac{-\pi\mathfrak{H}\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}}.\left\{\cos\left(\frac{\pi\mathfrak{H}'^2}{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}\right) + i.\sin\left(\frac{\pi\mathfrak{H}'^2}{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}\right)\right\}. \end{cases}$$

Exemple. Soit $k = 2$. On a alors: $\mathfrak{h} = \frac{1}{k} = \frac{1}{2}$; donc en vertu de l'exemple 9 du paragraphe précédent:

$$\mathfrak{p} = 0{,}085\ 7957,\quad \mathfrak{H} = 1{,}685\ 750,\quad \mathfrak{H}' = 2{,}156\ 515.$$

Donc on aura:

$$p = -0{,}085\ 7957,\quad K = 0{,}842\ 875 + i\,.\,1{,}078\ 258,\quad K' = 1{,}078\ 258.$$

Si l'on pose pour abréger: $\frac{\pi\mathfrak{H}\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2} = m$, $\frac{\mathfrak{H}'^2}{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}.180^0 = \varphi^0$, on aura:

$q = e^{-m}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $\mathrm{Log}\,\mathfrak{H} = 0{,}226\ 7933$

$\mathrm{Log}\,\mathfrak{H}^2 = 0{,}453\ 5866$; $\mathfrak{H}^2 = 2{,}841\ 755$

$\mathrm{Log}\,\mathfrak{H}' = 0{,}333\ 7526$

$\mathrm{Log}\,\mathfrak{H}'^2 = 0{,}667\ 5052$; $\mathfrak{H}'^2 = 4{,}650\ 560$

$\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2 = 7{,}492\ 315$

$\mathrm{Log}\,\pi = 0{,}497\ 1499$ $\quad$ $\mathrm{Log}\,180 = 2{,}255\ 2725$

$\mathrm{Log}\,\mathfrak{H} = 0{,}226\ 7933$ $\quad$ $\mathrm{Log}\,\mathfrak{H}'^2 = 0{,}667\ 5052$

$\mathrm{Log}\,\mathfrak{H}' = 0{,}333\ 7526$ $\quad$ $\mathrm{Log}\,(\mathfrak{H}'^2.180) = 2{,}922\ 7777$

$\mathrm{Log}\,(\pi\mathfrak{H}\mathfrak{H}') = 1{,}057\ 6958$ $\quad$ $\mathrm{Log}\,(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2) = 0{,}874\ 6158$

$\mathrm{Log}\,(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2) = 0{,}874\ 6158$ $\quad$ $\mathrm{Log}\,\varphi = 2{,}048\ 1619$

$\mathrm{Log}\,m = 0{,}183\ 0800$ $\quad$ $\varphi = 111{,}727\ 97$

$\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,e = 0{,}637\ 7843 - 1$ $\quad$ $\varphi^0 = 111^0 43' 40'',69$

$\mathrm{Log}\,(m\,\mathrm{Log}\,e) = 0{,}820\ 8643 - 1$ $\quad$ $180^0 - \varphi^0 = 68^0\ 16'\ 19'',31$

$\mathrm{Log}\,(e^m) = 0{,}662\ 0097$

$$\text{Log}\,(e^{-m}) = 0,337\,9903 - 1\,; \qquad \text{Log}(e^{-m}) = 0,337\,9903 - 1$$
$$\text{Log}\cos\varphi = 0,568\,4368_n - 1; \qquad \text{Log}\sin\varphi = 0,967\,9932 - 1$$
$$\text{Log}\,(e^{-m}.\cos\varphi) = 0,906\,4271_n - 2\,; \quad \text{Log}(e^{-m}.\sin\varphi) = 0,305\,9835 - 1$$
$$e^{-m}.\cos\varphi = -0,080\,617\,09 \qquad e^{-m}.\sin\varphi = 0,202\,294\,2$$
$$q = -0,080\,617\,09 + i\,.\,0,202\,294\,2.$$

98. Si le carré du module, k^2, est une quantité négative, le module complémentaire, k', sera réel, mais plus grand que l'unité. Si l'on pose alors: $\frac{1}{k'} = \mathfrak{h}'$, et qu'on désigne par $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$ le nome et les intégrales complètes correspondantes au module $\mathfrak{h} = \sqrt{1 - \mathfrak{h}'^2} = \sqrt{\frac{-k^2}{1-k^2}}$, on aura:

$$q = -\mathfrak{q},\ K = \tfrac{1}{k'}\,.\,\mathfrak{H},\ K' = \tfrac{1}{k'}(\mathfrak{H}' + i\,\mathfrak{H}),$$

$$p = e^{-\frac{\pi\mathfrak{H}\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}\right) + i\,.\,\sin\left(\frac{\pi\mathfrak{H}^2}{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}\right)\right\}.$$

Exemple. Soit $k^2 = -3$. On a alors $k' = 2$, $\mathfrak{h}' = \frac{1}{2}$,

$$\mathfrak{q} = 0,085\,7957,\ \mathfrak{H} = 2,156\,515,\ \mathfrak{H}' = 1,685\,750$$

Donc on aura:

$$q = -0,085\,7957,\ K = 1,078\,253,\ K' = 0,842\,875 + i\,.\,1,078\,258,$$
$$p = -0,080\,617\,09 + i\,.\,0,202\,294\,2.$$

99. Si le carré du module, k^2, est une quantité imaginaire, on emploiera les mêmes formules et transformations que dans le cas d'un module réel, seulement on ne peut pas alors employer les réductions trigonométriques.

Exemple. Soit: $k^2 = \frac{1+\sqrt{-1}}{2}$. Il faut alors employer la transformation:

$$k_4 = \left(\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}\right)^2,\ K_4 = \tfrac{1}{4}K(1 + \sqrt{k'})^2.$$

On a alors: $k'^2 = \frac{1-\sqrt{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} - i\,.\,\sin\frac{\pi}{4})$, $\sqrt{k'} = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}(\cos\frac{\pi}{16} - i\,.\,\sin\frac{\pi}{16})$,

$\frac{\pi}{16} = 11^0 15'$; $\text{Log}\cos\frac{\pi}{16} = 0,991\,5739 - 1$, $\text{Log}\sin\frac{\pi}{16} = 0,290\,2357 - 1$

$$\text{Log}\sqrt[8]{2} = 0,037\,6287 \qquad \text{Log}\sqrt[8]{2} = 0,037\,6287$$
$$\text{Log}\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\,.\cos\frac{\pi}{16}\right) = 0,953\,9452 - 1, \quad \text{Log}\left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}.\sin\frac{\pi}{16}\right) = 0,252\,6070 - 1$$
$$\sqrt{k'} = 0,899\,3841 - i\,.\,0,178\,8986.$$
$$1 - \sqrt{k'} = 0,100\,6159 + i\,.\,0,178\,8986 = a + ib = r(\cos\varphi + i\,.\,\sin\varphi),$$
$$1 + \sqrt{k'} = 1,899\,3841 - i\,.\,0,178\,8986 = a' - ib = r'(\cos\varphi' - i\,.\sin\varphi'),$$
$$r^2 = a^2 + b^2,\ \text{tang}\,\varphi = \frac{b}{a},\ r'^2 = a'^2 + b^2,\ \text{tang}\,\varphi' = \frac{b}{a'},$$
$$\text{Log}\,a = 0,002\,6666 - 1$$
$$\text{Log}\,a^2 = 0,005\,3332 - 2,\ a^2 = 0,010\,123\,56,$$

$\text{Log } b = 0{,}252\,6070 - 1$

$\text{Log } b \quad 0.252\,6070 - 1,\ a^2 = 0.010\,123\,56 \qquad \text{Log } a = 0{,}002\,6666 - 1$

$\text{Log } b^2 = 0{,}505\,2140 - 2,\ b^2 = 0{,}032\,004\,72, \text{Log tang } \varphi = 0.249\,9404$

$r^2 = 0.042\,128\,28 \qquad \varphi = 60^0 38' 44'',86$

$\text{Log } a' = 0{,}278\,6128. \qquad \text{Log } b = 0.252\,6070 - 1$

$\text{Log } a'^2 = 0{,}557\,2256, \qquad a'^2 = 3{,}607\,6600 \qquad \text{Log } a' = 0{,}278\,6128$

$b^2 = 0{,}032\,0047, \quad \text{Log tang } \varphi' = 0{,}973\,9942 - 2$

$r'^2 = 3{,}639\,6647. \qquad \varphi' = 5^0 22' 50'',46.$

$k_4 = \left(\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}\right)^2 = \frac{r^2}{r'^2}\,(\cos 2(\varphi + \varphi') + i . \sin 2(\varphi + \varphi')),\ \varphi + \varphi' = 66^0\,1'\,35'',32.$

De là on trouve:

$$q = \sqrt[4]{\frac{k_4}{4}}\left\{1 + 2.\left(\frac{k_4}{4}\right)^2 + \ldots\right\},$$

$$\left(\frac{k_4}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4}\,(\cos 4(\varphi + \varphi') + i . \sin 4(\varphi + \varphi')),$$

$4(\varphi + \varphi') = 264^0\,6'\,21'',28,\ 360^0 - 4(\varphi + \varphi') = 95^0\,53'\,38'',72.$

$\text{Log } r^2 = 0{,}624\,5737 - 2$

$\text{Log } r'^2 = 0{,}561\,0614$

$\text{Log}\left(\frac{r^2}{r'^2}\right) = 0{,}063\,5123 - 2$

$\text{Log}\left(\frac{r^4}{r'^4}\right) = 0{,}127\,0246 - 4$

$\text{Log } 16 = 1{,}204\,1200$

$\text{Log}\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4}\right) = 0{,}922\,9046 - 6; \qquad \text{Log}\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4}\right) = 0{,}922\,9046 - 6$

$\text{Log cos } 4(\varphi + \varphi') = 0{,}011\,5278_n - 1; \qquad \text{Log sin } 4(\varphi + \varphi') = 0{,}997\,6980_n - 1.$

$\text{Log}\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4} \cdot \cos 4(\varphi + \varphi')\right) = 0{,}934\,4324_n - 7, \quad \text{Log}\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4} \cdot \sin 4(\varphi + \varphi')\right) = 0{,}920\,6026_n - 6$

$\frac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4} \cdot \cos 4(\varphi + \varphi') = -0{,}000\,000\,860; \quad \frac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4} \cdot \sin 4(\varphi + \varphi') = -0{,}000\,008\,329$

$1 + 2 . \left(\frac{k_4}{4}\right)^2 = 1 - 0{,}000\,001\,720 - i . 0{,}000\,016\,658$

$= 0{,}999\,998\,280 - i . 0.000\,016\,658$

$= a - i . b = \rho\,(\cos \chi - i . \sin \chi),$

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = a + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a} = 0{,}999\,998\,280$

$\text{tang } \chi = \frac{b}{a}, \quad \text{Log } b = 0{,}221\,6326 - 5$

$\text{Log } a = 0{,}999\,9993 - 1$

$\text{Log tang } \chi = 0{,}221\,6333 - 5$

$\chi = 0^0\,0'\,3'',44$

$$\sqrt{\frac{k_4}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{r'} \cdot (\cos(\varphi + \varphi') + i . \sin(\varphi + \varphi'))$$

$$q = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r}{r'} \cdot \rho \cdot (\cos(\varphi + \varphi' - \chi) + i \cdot \sin(\varphi + \varphi' - \chi))$$

$$\operatorname{Log} \tfrac{r}{r'} = 0{,}031\,7561 - 1$$

$$\operatorname{Log} \rho = 0{,}999\,9993 - 1$$

$$\operatorname{Log} \tfrac{1}{2} = 0{,}698\,9700 - 1$$

$$\operatorname{Log}(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{r}{r'} \cdot \rho) = 0{,}730\,7254 - 2; \quad = 0{,}730\,7254 - 2$$

$\varphi + \varphi' - \chi = 66^0 1' 31'',88$; $\operatorname{Log}\cos(\varphi + \varphi' - \chi) = 0{,}608\,8785 - 1$,

$$\operatorname{Log}\sin(\varphi + \varphi' - \chi) = 0{,}960\,8162 - 1$$

$$\operatorname{Log}(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{r}{r'} \cdot \rho \cdot \cos(\varphi + \varphi' - \chi)) = 0{,}339\,6039 - 2,$$

$$\operatorname{Log}(\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{r}{r'} \cdot \rho \cdot \sin(\varphi + \varphi' - \chi)) = 0{,}691\,5416 - 2$$

$$q = 0.021\,857\,67 + i \cdot 0{,}049\,152\,05$$

$$K_4 = \tfrac{\pi}{2}(1 + 2q^2 + \ldots)^4 = \tfrac{\pi}{2}(1 + 4q^4 + \ldots)$$

$$q^4 = \tfrac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4} \cdot \rho^4 \left\{ \cos 4(\varphi + \varphi' - \chi) + i \cdot \sin 4(\varphi + \varphi' - \chi) \right\}$$

$4(\varphi + \varphi' - \chi) = 264^0\,6'7'',52$, $360^0 - 4(\varphi + \varphi' - \chi) = 95^0 53' 52'',48$

$$\operatorname{Log}(\tfrac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4} \cdot \rho^4) = 0{,}922\,9016 - 6 \qquad = 0{,}922\,9016 - 6$$

$$\operatorname{Log}\cos 4(\varphi + \varphi' - \chi) = 0{,}011\,8084_n - 1, \quad \operatorname{Log}\sin 4(\varphi + \varphi' - \chi) = 0{,}997\,6949_n - 1$$

$$\operatorname{Log}(\tfrac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4} \cdot \rho^4 \cdot \cos 4(\varphi + \varphi' - \chi)) = 0{,}934\,7100_n - 7,$$

$$\operatorname{Log}(\tfrac{1}{16} \cdot \frac{r^4}{r'^4} \cdot \rho^4 \cdot \sin 4(\varphi + \varphi' - \chi)) = 0{,}920\,5965_n - 6$$

$$q^4 = -0{,}000\,000\,860 - i \cdot 0{,}000\,008\,329$$

$$1 + 4q^4 = 0{,}999\,996\,560 - i \cdot 0{,}000\,033\,316$$

$$\tfrac{\pi}{2} = 1{,}570\,796\,327$$

$$K_4 = 1{,}570\,794\,977 - i \cdot 0{,}000\,052\,332 = a - ib = \rho'(\cos\chi' - i \sin\chi')$$

$$\rho' = \sqrt{a^2 + b^2} = a + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a} = a = 1{,}570\,794\,977.$$

$$\operatorname{tang}\chi' = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{Log} b = 0{,}718\,7673 - 5$$

$$\operatorname{Log} a = 0{,}196\,1198$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\chi' = 0{,}522\,6475 - 5$$

$$\chi' = 0^0 0' 6'',87$$

$K = \dfrac{4K_4}{(1 + \sqrt{k'})^2}$, $1 + \sqrt{k'} = r'(\cos\varphi' - i \sin\varphi')$, $r'^2 = 3{,}639\,6647$, $\varphi' = 5^0 22' 50'',46$

$$K = \frac{4\rho'}{r'^2}\left\{\cos(2\varphi' - \chi') + i \sin(2\varphi' - \chi')\right\}; \quad 2\varphi' - \chi' = 10^0 45' 34'',05.$$

$$\operatorname{Log} 4\rho' = 0{,}798\,1798$$

$$\operatorname{Log} r'^2 = 0{,}561\,0614$$

$$\operatorname{Log}(\frac{4\rho'}{r'^2}) = 0{,}237\,1184 \qquad = 0{,}237\,1184$$

$$\operatorname{Log}\cos(2\varphi' - \chi') = 0{,}992\,2970 - 1, \qquad \operatorname{Log}\sin(2\varphi' - \chi') = 0{,}271\,1122 - 1$$

$$\operatorname{Log}(\frac{4\rho'}{r'^2} \cdot \cos(2\varphi' - \chi')) = 0{,}229\,4154, \qquad \operatorname{Log}(\frac{4\rho'}{r'^2} \cdot \sin(2\varphi' - \chi')) = 0{,}508\,2306 - 1$$

$$K = 1{,}695\,959 + i \,.\, 0{,}322\,278.$$

Puisque ici k^2 et k'^2 ne diffèrent que dans le signe de i, on aura:

$$p = 0{,}021\,857\,67 - i \,.\, 0{,}049\,152\,05$$
$$K' = 1{,}695\,959 \quad - i \,.\, 0{,}322\,278.$$

100. Après avoir calculé les valeurs des nomes et celles des intégrales complètes, on en déduira facilement les valeurs des θfonctions et celles des fonctions elliptiques pour des valeurs quelconques de l'argument et du module. à l'aide des formules du **62** et **64**:

$$\theta x = 1 + 2.\sum_1^\infty{}_m (-1)^m . q^{m^2} . \cos 2mx =$$
$$= 1 - 2q . \cos 2x + 2q^4 . \cos 4x + 2q^9 . \cos 6x - 2q^{16} . \cos 8x + \ldots$$
$$\theta_1 x = -2.\sum_1^\infty{}_m (-1)^m . q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . \sin (2m-1)x =$$
$$= 2.\sqrt[4]{q} . \sin x - 2\sqrt[4]{q^9} . \sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}} . \sin 5x - 2\sqrt[4]{x^{49}} . \sin 7x + \ldots$$
$$\theta_2 x = 2.\sum_1^\infty{}_m q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} . \cos (2m-1)x =$$
$$= 2\sqrt[4]{q} . \cos x + 2\sqrt[4]{q^9} . \cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}} . \cos 5x + 2\sqrt[4]{q^{49}} . \cos 7x + \ldots$$
$$\theta_3 x = 1 + 2 . \sum_1^\infty{}_m q^{m^2} . \cos 2mx =$$
$$= 1 + 2q . \cos 2x + 2q^4 . \cos 4x + 2q^9 . \cos 6x + 2q^{16} . \cos 8x + \ldots$$

$$\sin \operatorname{am} u = \frac{1}{\sqrt{k}} . \frac{\theta_1\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}, \quad \cos \operatorname{am} u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} . \frac{\theta_2\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2K}\right)},$$

$$\Delta \operatorname{am} u = \sqrt{k'} . \frac{\theta_3\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}{\theta\left(\frac{\pi u}{2K}\right)}.$$

Pour trouver à l'aide de ces formules les θfonctions et de là les fonctions elliptiques avec 9 décimales, il faut, si l'angle du module ne surpasse pas 30^0, tout au plus deux termes des séries précédentes; si l'angle du module surpasse 30^0 sans surpasser 75^0, il faut tout au plus trois termes; si l'angle surpasse 75^0 sans surpasser 87^0, il faut tout au plus quatre termes; si l'angle surpasse 87^0 sans surpasser $98^0\,30'$ il faut tout au plus cinq termes; si l'angle surpasse $89^0\,30'$ sans surpasser $89^0\,59'$ il faut tout au plus six termes.

Dans le cas que le module soit extrêmement près de l'unité on emploiera les formules avec le nome complémentaire p, savoir:

$$\theta x = \sqrt{-\frac{\operatorname{Log} p}{\pi \operatorname{Log} e}} . \sum_1^\infty{}_n \left(p^{\left(\frac{2n-1}{2} - \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(\frac{2n-1}{2} + \frac{x}{\pi}\right)^2} \right) =$$
$$= \sqrt{-\frac{\operatorname{Log} p}{\pi \operatorname{Log} e}} . \left\{ p^{\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(\frac{5}{2} - \frac{x}{\pi}\right)^2} + \ldots \right.$$

$$\theta_1 x = -\sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{Log } e}} \cdot \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \left(p^{\left(\frac{2n-1}{2} - \frac{x}{\pi}\right)^2} - p^{\left(\frac{2n-1}{2} + \frac{x}{\pi}\right)^2} \right) =$$

$$= \sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{Log } e}} \cdot \left\{ p^{\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}\right)^2} - p^{\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi}\right)^2} - p^{\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(\frac{5}{2} - \frac{x}{\pi}\right)^2} - \ldots \right\},$$

$$\theta_2 x = \sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{Log } e}} \cdot \left\{ p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} + \sum_1^\infty (-1)^n \cdot \left(p^{\left(n - \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(n + \frac{x}{\pi}\right)^2} \right) \right\} =$$

$$= \sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{Log } e}} \left\{ p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} - p^{\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^2} - p^{\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(2 - \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(2 + \frac{x}{\pi}\right)^2} - \ldots \right\},$$

$$\theta_3 x = \sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{Log } e}} \cdot \left\{ p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} + \sum_1^\infty \left(p^{\left(n - \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(n + \frac{x}{\pi}\right)^2} \right) \right\} =$$

$$= \sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{Log } e}} \cdot \left\{ p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(2 - \frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(2 + \frac{x}{\pi}\right)^2} + \ldots \right\}.$$

Si x surpasse $\frac{\pi}{2}$, ou, puisque $x = \frac{\pi u}{2K}$, si u surpasse K, on commencera par réduire x à une valeur plus petite que $\frac{\pi}{2}$ à l'aide des formules du 63:

$$\theta(x + \tfrac{\pi}{2}) = \theta_3 x,\ \theta_1(x + \tfrac{\pi}{2}) = \theta_2 x,\ \theta_2(x + \tfrac{\pi}{2}) = -\theta_1 x,\ \theta_3(x + \tfrac{\pi}{2}) = \theta x,$$

donc: $\theta x = \theta_3(x - \frac{\pi}{2})$, $\theta_1 x = \theta_2(x - \frac{\pi}{2})$, $\theta_2 x = -\theta_1(x - \frac{\pi}{2})$, $\theta_3 x = \theta(x - \frac{\pi}{2})$.

Avec des tables des logarithmes de 7 décimales on n'a besoin que des deux premiers termes des fonctions θx et $\theta_1 x$, et du premier terme des fonctions $\theta_2 x$ et $\theta_3 x$, si l'angle du module surpasse $89^0\ 59'$.

Exemple 1. Soit $k = \frac{1}{2} = \sin 30^0$, $u = 1{,}2$. On a alors en vertu de l'exemple 9 du **96**:

$$q = 0{,}017\,972\,39, \quad \text{Log } q = 0{,}254\,6059 - 2,$$
$$K = 1{,}685\,750 \quad \text{Log } K = 0{,}226\,7933$$

On a alors: $x = \frac{\pi u}{2K} = \frac{u}{2K} \cdot 180^0$; Log u = 0,079 1812

Log 180 = 2,255 2725

Log (u . 180) = 2,334 4537

Log (2 K) = 0,527 8233

Log x = 1,806 6304

$x = 64{,}066\,41$

$= 64^0\ 3'\ 59'',08$

$\theta x = 1 - 2q \cdot \cos 2x + 2q^4 \cdot \cos 4x;$

$2x = 128^0\ 7'\ 58'',16;$ $\quad 4x = 256^0\ 15'\ 56'',3$

$180^0 - 2x = 51^0\ 52'\ 1'',84;$ $\quad 270^0 - 4x = 13^0\ 44'\ 3'',7$

Log cos 2x = 0,790 6278$_n$ − 1; $\quad$ Log cos 4x = 0,375$_n$ − 1

Log q = 0,254 6059 − 2 $\quad$ Log q^4 = 0,018 − 7

$\text{Log}\,(q.\cos 2x) = 0{,}045\,2337_n - 2$ $\quad \text{Log}(q^4.\cos 4x) = 0{,}393_n - 8$

$q.\cos 2x = -0{,}011\,097\,72$ $\quad q^4.\cos 4x = -0{,}000\,000\,02$

$$\theta x = 1{,}022\,195\,40.$$

$$\theta_1 x = 2\sqrt[4]{q}.\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x,$$

$x = 64^0\,3'\,59'',08,$ $\quad 3x = 192^0\,11'\,57'',24$

$\text{Log}\sin x = 0{,}953\,9053 - 1,$ $\quad \text{Log}\sin 3x = 0{,}3249_n - 1$

$\text{Log}\sqrt[4]{q} = 0{,}563\,6515 - 1,$ $\quad \text{Log}\sqrt[4]{q^9} = 0{,}0729 - 4$

$\text{Log}\,(\sqrt[4]{q}.\sin x) = 0{,}517\,5568 - 1,$ $\quad \text{Log}(\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x) = 0{,}3978_n - 5$

$\sqrt[4]{q}.\sin x = 0{,}329\,2735,$ $\quad \sqrt[4]{q^9}.\sin 3x = -0{,}000\,0250$

$$\theta_1 x = 0{,}658\,5970$$

$$\theta_2 x = 2\sqrt[4]{q}.\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}.\cos 3x,$$

$\text{Log}\cos x = 0{,}640\,8084 - 1;$ $\quad \text{Log}\cos 3x = 0{,}9901_n - 1$

$\text{Log}\sqrt[4]{q} = 0{,}563\,6515 - 1,$ $\quad \text{Log}\sqrt[4]{q^9} = 0{,}0729 - 4$

$\text{Log}\,(\sqrt[4]{q}.\cos x) = 0{,}204\,4599 - 1,$ $\quad \text{Log}(\sqrt[4]{q^9}.\cos 3x) = 0{,}0630_n - 4,$

$\sqrt[4]{q}.\cos x = 0{,}160\,1253$ $\quad \sqrt[4]{q^9}.\cos 3x = -0{,}000\,1156$

$$\theta_2 x = 0{,}330\,0194$$

$$\theta_3 x = 1 + 2q.\cos 2x + 2q^4.\cos 4x = 0{,}977\,804\,52$$

$$\sin\text{am}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_1 x}{\theta x},$$

$\text{Log}\,k = 0{,}698\,9700 - 1$

$\text{Log}\sqrt{k} = 0{,}849\,4850 - 1$

$\text{Log}\,\theta x = 0{,}009\,5340$

$\text{Log}\,(\sqrt{k}.\theta x) = 0{,}859\,0190 - 1$

$\text{Log}\,\theta_1 x = 0{,}818\,6197 - 1$

$\text{Log}\sin\text{am}\,u = 0{,}959\,6007 - 1,$

$\sin\text{am}\,u = 0{,}911\,1727,$ $\quad \text{am}\,u = 65^0\,40'\,4'',5$

$$\cos\text{am}\,u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_2 x}{\theta x},$$

$\text{Log}\,k' = 0{,}937\,5306 - 1$

$\text{Log}\sqrt{k'} = 0{,}968\,7653 - 1$

$\text{Log}\,\theta_2 x = 0{,}505\,1763 - 1$

$\text{Log}\,(\sqrt{k'}\,\theta_2 x) = 0{,}473\,9416 - 1$

$\text{Log}\,(\sqrt{k}.\theta x) = 0{,}859\,0190 - 1$

$\text{Log}\cos\text{am}\,u = 0{,}614\,9226 - 1$

$\cos\text{am}\,u = 0{,}412\,0241,$ $\quad \text{am}\,u = 65^0\,40'\,4'',6$

$$\Delta\,\text{am}\,u = \sqrt{k'}.\frac{\theta_3 x}{\theta x},$$

$\text{Log}\sqrt{k'} = 0{,}968\,7653 - 1$

$\text{Log}\,\theta_3 x = 0{,}990\,2521 - 1,$

$\text{Log}\,(\sqrt{k'}.\theta_3 x) = 0{,}959\,0174 - 1,$

$\text{Log}\,\theta x = 0{,}009\,5340$

$$\text{Log } \sqrt{\text{am u}} = 0{,}949\,4834 - 1,$$
$$\sqrt{\text{am u}} = 0{,}890\,1914$$

Exemple 2. Soit $\alpha = 89^0\ 59'$, $k = 0{,}999\ 999\ 957\ 692$, $u = 1{,}_2$. On a alors en vertu de l'exemple 2 du 96 $p = 0{,}000\ 000\ 005\ 288\ 496$, $\text{Log } p = 0{,}723\,3322 - 9$ $K = 9{,}528\ 865$, $\text{Log } K = 0{,}979\ 0412$.

$$\frac{x}{\pi} = \frac{u}{2K}; \quad \text{Log } u = 0{,}079\,1812$$
$$\text{Log } 2K = 1{,}280\,0712$$
$$\text{Log } \left(\frac{x}{\pi}\right) = 0{,}799\,1100 - 2,$$
$$\frac{x}{\pi} = 0{,}062\,966\,56$$

$$\theta x = \sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{ Log } e}}\left\{p^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2}\right\}; \quad \theta_1 x = \sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{ Log } e}}\left\{p^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} - p^{\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2}\right\}.$$

$\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi} = 0{,}437\,033\,44;$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} = 0{,}562\,966\,56$

$\text{Log}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}\right) = 0{,}640\,5147 - 1;$ $\quad \text{Log}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi}\right) = 0{,}750\,4826 - 1,$

$\text{Log}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\pi}\right)^2 = 0{,}281\,0294 - 1;$ $\quad \text{Log}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\pi}\right)^2 = 0{,}500\,9652 - 1,$

$\text{Log Log } p = 0{,}917\,8555_n$ $\quad = 0{,}917\,8555_n$

$\text{Log Log } p^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} = 0{,}198\,8849_n;$ $\quad \text{Log Log } p^{\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} = 0{,}418\,8207_n$

$\text{Log } p^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} = -1{,}580\,8290$ $\quad \text{Log } p^{\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} = -2{,}623\,1355$

$= 0.419\,1710 - 2,$ $\quad = 0{,}376\,8645 - 3$

$p^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} = 0{,}026\,2525;$ $\quad p^{\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} = 0{,}002\,381\,6.$

$p^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} = 0{,}028\,6341;$ $\quad p^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)^2} - p^{\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)^2} = 0{,}023\,8709$

$\text{Log}\left(\theta x . \sqrt{-\frac{\pi \text{ Log } e}{\text{Log } p}}\right) = 0{,}456\,8835 - 2;$ $\quad \text{Log}\left(\theta_1 x . \sqrt{-\frac{\pi \text{ Log } e}{\text{Log } p}}\right) = 0{,}377\,8688 - 2$

$\text{Log}\sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{ Log } e}} = 0{,}391\,4606$ $\quad = 0{,}391\,4606$

$\text{Log } \theta x = 0{,}848\,3441 - 2,$ $\quad \text{Log } \theta_1 x = 0{,}769\,3294 - 2$

$\theta x = 0{,}070\,5252,$ $\quad \theta_1 x = 0{,}058\,7935$

$$\theta_2 x = \theta_3 x = \sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{ Log } e}} \cdot p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2};$$

$\text{Log}\left(\frac{x}{\pi}\right) = 0{,}799\,1100 - 2$

$\text{Log}\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 = 0{,}598\,2200 - 3$

$\text{Log Log } p = 0{,}917\,8555_n$

$\text{Log Log } p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} = 0{,}516\,0755_n - 2$

$$\text{Log } p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} = -\ 0{,}032\,8152$$

$$= 0{,}967\,1848 - 1.$$

$$\text{Log}\sqrt{-\frac{\text{Log } p}{\pi \text{ Log } e}} = 0{,}391\,4606$$

$$\text{Log } \theta_2 x = \text{Log } \theta_3 x = 0{,}358\,6454$$

$$\theta_2 x = \theta_3 x = 2{,}283\,733.$$

$$\sin \text{am } u = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_1 x}{\theta x};\quad \text{Log } \theta_1 x = 0{,}769\,3294 - 2$$

$$\text{Log } (\sqrt{k} \,.\, \theta x) = 0{,}848\,3441 - 2$$

$$\text{Log sin am } u = 0{,}920\,9853 - 1$$

$$\sin \text{am } u = 0.833\,6573,\ \text{am } u = 56^0\ 28'\ 33''{,}0$$

$$\cos \text{am } u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_2 x}{\theta x},\quad \text{Log } k' = 0{,}463\,7261 - 4$$

$$\text{Log } \sqrt{k'} = 0{,}231\,8630 - 2$$

$$\text{Log } \theta_2 x = 0{,}358\,6454$$

$$\text{Log } (\sqrt{k'} \,.\, \theta_2 x) = 0{,}590\,5084 - 2$$

$$\text{Log } (\sqrt{k} \,.\, \theta x) = 0{,}848\,3441 - 2$$

$$\text{Log cos am } u = 0{,}742\,1643 - 1$$

$$\cos \text{am } u = 0{,}552\,2769;\ \text{am } u = 56^0\ 28'\ 33''.6$$

$$\Delta \text{ am } u = \sqrt{k'} \cdot \frac{\theta_3 x}{\theta x} = 0{,}552\,2863.$$

101. Pour trouver les valeurs des fonctions elliptiques on peut aussi employer la transformation du Landen. En vertu du **79** on a alors :

$$\sin (2\varphi - \varphi_2) = k_2 \,.\, \sin \varphi_2,$$

où: $k = \sin \alpha$, $\varphi = \text{am } (u,k)$, $k_2 = \sin \alpha_2 = \text{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha$, $\varphi_2 = \text{am } (u_2, k_2)$,

$$u_2 = \frac{4K_2 x}{\pi},\ x = \frac{\pi u}{2K},\ \text{donc: } u_2 = \frac{2uK_2}{K}.$$

De même on a :

$$\sin (2\varphi_2 - \varphi_4) = k_4 \sin \varphi_4,$$

où: $k_4 = \sin \alpha_4 = \text{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha_2$, $\varphi_4 = \text{am}(u_4, k_4)$, $u_4 = \frac{2u_2 K_4}{K_2} = \frac{4uK_4}{K}$;

$$\sin (2\varphi_4 - \varphi_8) = k_8 \sin \varphi_8,$$

où: $k_8 = \sin \alpha_8 = \text{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha_4$, $\varphi_8 = \text{am } (u_8, k_8)$, $u_8 = \frac{2u_4 K_8}{K_4} = \frac{8uK_8}{K}$;

et ainsi de suite.

Pour des valeurs très petites de k_n on a enfin en vertu de la formule (4) du **57**: $\varphi_n = \frac{\pi u_n}{2K_n} = \frac{u_n}{K_n} \,.\, 90^0$.

Si l'on fait usage des tables logarithmiques avec sept décimales et si l'angle du module ne surpasse pas 10^0, on n'a pas besoin d'aller plus loin que de chercher φ_2, et on aura alors:

$$\varphi_2 = \frac{u_2}{K_2} \cdot 90^0 = \frac{2u}{K} \cdot 90^0, \quad \sin(2\varphi - \varphi_2) = \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sin\varphi_2.$$

Si l'angle du module surpasse 10^0 sans surpasser 40^0 on aura:

$$\sin\alpha_2 = \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \varphi_4 = \frac{4u}{K} \cdot 90^0,$$

$$\sin(2\varphi_2 - \varphi_4) = \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2 \cdot \sin\varphi_4, \quad \sin(2\varphi - \varphi_2) = \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sin\varphi_2.$$

Si l'angle du module surpasse 40^0 sans surpasser 75^0, on aura:

$$\sin\alpha_2 = \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sin\alpha_4 = \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2, \quad \varphi_3 = \frac{8u}{K} \cdot 90^0,$$

$$\sin(2\varphi_4 - \varphi_3) = \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha_4 \cdot \sin\varphi_3, \quad \sin(2\varphi_2 - \varphi_4) = \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2 \cdot \sin\varphi_4,$$

$$\sin(2\varphi - \varphi_2) = \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \sin\varphi_2$$

et ainsi de suite.

Exemple. Soit $k = \frac{1}{2} = \sin 30^0$, $u = 1{,}2$. On a alors $\alpha = 30^0$, et suivant l'exemple 9 du **96**:

$$\text{Log } K = 0{,}226\,7933, \quad \alpha_2 = 4^0\,7'\,1'',904.$$

$$\varphi_4 = \frac{4u}{K} \cdot 90^0; \quad \text{Log } u = 0{,}079\,1812$$

$$\text{Log } (4 \cdot 90) = 2{,}556\,3025$$

$$\text{Log } (4u \cdot 90) = 2{,}635\,4837$$

$$\text{Log } K = 0{,}226\,7933$$

$$\text{Log } \varphi_4 = 2{,}408\,6904, \quad \varphi_4 = 256{,}265\,65 = 256^0\,15'\,56'',3$$

$\sin(2\varphi_2 - \varphi_4) = \tang^2 \frac{1}{2}\alpha_2 \cdot \sin\varphi_4$; $\text{Log} \sin\varphi_4 = 0{,}987\,4012_n - 1$

$$\text{Log} \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha_2 = 0{,}111\,2716 - 3$$

$$\text{Log} \sin(2\varphi_2 - \varphi_4) = 0{,}098\,6728_n - 3$$

$$\varphi_4 - 2\varphi_2 = 0^0\,4'\,18'',9$$

$$\varphi_4 = 256^0\,15'\,56'',3$$

$$2\varphi_2 = 256^0\,11'\,37'',4$$

$$\varphi_2 = 128^0\,5'\,48'',7$$

$\sin(2\varphi - \varphi_2) = \tang^2 \frac{1}{2}\alpha \cdot \sin\varphi_2$; $\text{Log} \sin\varphi_2 = 0{,}895\,9575 - 1$

$$\text{Log} \tang^2 \tfrac{1}{2}\alpha = 0{,}856\,1050 - 2$$

$$\text{Log} \sin(2\varphi - \varphi_2) = 0{,}752\,0625 - 2$$

$$2\varphi - \varphi_2 = 3^0\,14'\,20'',5$$

$$\varphi_2 = 128^0\,5'\,48'',7$$

$$2\varphi = 131^0\,20'\,9'',2$$

$$\varphi = 65^0\,40'\,4'',6,$$

laquelle valeur coincide avec celle trouvée dans l'exemple 1 du paragraphe précédent.

102. Si le module est plus grand que l'unité, on emploiera pour le calcul des fonctions elliptiques les formules du **84**:

(1) $\sin\text{am}\,(u,k) = \frac{1}{k}\,.\,\sin\text{am}\,(ku, \frac{1}{k})$, $\cos\text{am}\,(u,k) = \Delta\,\text{am}\,(ku, \frac{1}{k})$,

$$\Delta\,\text{am}\,(u,k) = \cos\text{am}\,(ku, \frac{1}{k}).$$

Si l'on désigne par q, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ le nome et les intégrales complètes correspondantes au module $\frac{1}{k}$, on a en vertu du même paragraphe:

$$\theta(x,q) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,.\sqrt{\frac{\mathfrak{H}+i\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}}}\,.\,e^{-\frac{x^2}{\pi^2}\left(\frac{\mathfrak{H}'-i\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}}\right)}\,.\,\theta\left(\frac{(\mathfrak{H}+i\mathfrak{H}')x}{\mathfrak{H}},\ q\right).$$

Or on a: $x = \frac{\pi u}{2K}$, $K = \frac{1}{k}(\mathfrak{H}+i\mathfrak{H}')$, donc: $\frac{(\mathfrak{H}+i\mathfrak{H}')x}{\mathfrak{H}} = \frac{\pi k u}{2\mathfrak{H}}$,

$$\frac{x^2}{\pi^2} = \frac{u^2}{4K^2} = \frac{k^2u^2}{4(\mathfrak{H}+i\mathfrak{H}')^2} = \frac{k^2u^2}{4(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)^2}\,.\,(\mathfrak{H}-i\mathfrak{H}')^2,$$

$$\frac{x^2}{\pi^2}\left(\frac{\mathfrak{H}'-i\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}}\right) = -\frac{k^2u^2(\mathfrak{H}'+i\mathfrak{H})}{4\mathfrak{H}\,(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)},$$

$$e^{-\frac{x^2}{\pi^2}\left(\frac{\mathfrak{H}'-i\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}}\right)} = e^{\frac{k^2\mathfrak{H}'u^2}{4\mathfrak{H}(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)}}\,.\left\{\cos\left(\frac{k^2u^2}{4(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)}\right)+i\,.\,\sin\left(\frac{k^2u^2}{4(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)}\right)\right\}.$$

De plus on a: $\frac{\mathfrak{H}+i\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}}{\mathfrak{H}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, où $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}}$,

donc: $\sqrt{\frac{\mathfrak{H}+i\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}}} = \frac{\sqrt[4]{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}}{\sqrt{\mathfrak{H}}}\,(\cos\frac{\varphi}{2} + i\,.\,\sin\frac{\varphi}{2})$,

et enfin: $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \cos\frac{\pi}{4} - i\,.\,\sin\frac{\pi}{4}$.

Donc si l'on pose pour abréger:

$\frac{\sqrt[4]{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}}{\sqrt{\mathfrak{H}}} = a$, $\frac{k^2\mathfrak{H}'u^2}{4\mathfrak{H}\,.\,(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)} = m$, $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{k^2u^2}{4(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)} = \psi$, $\frac{\pi k u}{2\mathfrak{H}} = \xi$,

on aura:

(2) $$\theta x = a\,.\,e^m\,(\cos\psi - i\,.\,\sin\psi)\,.\,\theta(\xi,q).$$

De même on trouvera des formules (5), (6) et (7) du **84**:

(3) $$\theta_1 x = a\,.\,e^m\,(\cos\psi - i\,.\,\sin\psi)\,.\,\theta_1(\xi,q),$$

(4) $$\theta_2 x = a\,.\,e^m\,(\cos(\tfrac{\pi}{4} - \psi) + i\,.\,\sin(\tfrac{\pi}{4} - \psi))\,.\,\theta_3\,(\xi,q),$$

(5) $$\theta_3 x = a\,.\,e^m\,(\cos(\tfrac{\pi}{4} - \psi) + i\,.\,\sin(\tfrac{\pi}{4} - \psi))\,.\,\theta_2\,(x,q),$$

Exemple. Soit $k = 2$, $u = 0{,}6$. On a alors: $\frac{1}{k} = 0{,}5$, $ku = 1{,}2$, donc en vertu de l'exemple 1 du paragraphe précédent:

$$\sin\text{am}\,(ku, \tfrac{1}{k}) = 0{,}911\,1727, \qquad \cos\text{am}\,(ku, \tfrac{1}{k}) = 0{,}412\,0241,$$

$$\Delta\,\text{am}\,(ku, \tfrac{1}{k}) = 0{,}890\,1914,$$

et de là:

$$\sin\text{am}\,(u,k) = 0{,}455\,5864, \quad \cos\text{am}\,(u,k) = 0{,}890\,1914,$$

$$\Delta\,\text{am}\,(u,k) = 0{,}412\,0241, \qquad \text{am}\,(u,k) = 27^0\,6'\,9'',6$$

En vertu de l'exemple 9 du **96** on a de plus:

$q = 0{,}017\,972\,39$, $\mathfrak{H} = 1{,}685\,750$, $\mathfrak{H}' = 2{,}156\,515$

Donc: $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\mathfrak{H}'}{\mathfrak{H}}$, $\operatorname{Log}\mathfrak{H}' = 0{,}333\,7526$,

$\operatorname{Log}\mathfrak{H} = 0{,}226\,7933$,

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\varphi = 0{,}106\,9593$, $\varphi = 51^0\,59'\,6'',8$

$\psi = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{k^2u^2}{4(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)}$; $\frac{k^2u^2}{4(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)} = \frac{k^2u^2.\,180^0}{4\pi(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)}$, $\operatorname{Log}(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2) = 0{,}874\,6160$

$\operatorname{Log} 4\pi = 1{,}099\,2099$

$\operatorname{Log}(4\pi(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)) = 1{,}973\,8259$

$\operatorname{Log}(k^2u^2.\,180) = 2{,}413\,6350$

$\operatorname{Log}\left(\frac{k^2u^2.\,180}{4\pi(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)}\right) = 0{,}439\,8091$

$\frac{k^2u^2.\,180^0}{4\pi(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)} = 2^0{,}753\,018$

$= 2^0\,45'\,10'',9$

$\frac{\varphi}{2} = 25^0\,59'\,33'',4$

$\frac{\pi}{4} - \varphi = 28^0\,44'\,44'',3$

$\psi = 16^0\,15'\,15'',7$

$m = \frac{k^2\mathfrak{H}'u^2}{4\mathfrak{H}.(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)}$, $\operatorname{Log}\mathfrak{H}' = 0{,}333\,7526$, $a = \frac{\sqrt[4]{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2}}{\sqrt{\mathfrak{H}}}$, $\operatorname{Log}\mathfrak{H} = 0{,}226\,7933$

$\operatorname{Log}(k^2u^2) = 0{,}158\,3625$ $\quad$ $\operatorname{Log}(\sqrt{\mathfrak{H}}) = 0{,}113\,3966$

$\operatorname{Log}(k^2\mathfrak{H}'u^2) = 0{,}492\,1151$, $\quad$ $\operatorname{Log}\sqrt[4]{\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2} = 0{,}218\,6540$

$\operatorname{Log}(4\mathfrak{H}.(\mathfrak{H}^2+\mathfrak{H}'^2)) = 1{,}703\,4693$ $\quad$ $\operatorname{Log} a = 0{,}105\,2574$

$\operatorname{Log} m = 0{,}788\,6458 - 2$ $\quad$ $\operatorname{Log}(e^m) = 0{,}026\,6950$

$\operatorname{Log}\operatorname{Log} e = 0{,}637\,7843 - 1$ $\quad$ $\operatorname{Log}(a.\,e^m) = 0{,}131\,9524$

$\operatorname{Log}(m \operatorname{Log} e) = 0{,}436\,4201 - 2$

$\operatorname{Log}(e^m) = 0{,}026\,6950$

$\xi = \frac{\pi k u}{2\mathfrak{H}}$. Donc en vertu de l'exemple 1 du **100** on a:

$\theta(\xi,q) = 1{,}022\,195\,40$; $\theta_1(\xi,q) = 0{,}658\,5970$;

$\theta_2(\xi,q) = 0{,}320\,0194$; $\theta_3(\xi,q) = 0{,}977\,804\,52$.

De là on trouve:

$\theta x = a.\,e^m\theta(\xi,q).(\cos\psi - i.\sin\psi)$;

$\operatorname{Log}\theta(\xi,q) = 0{,}009\,5339$ $\quad$ $= 0{,}009\,5339$

$\operatorname{Log}(a.e^m) = 0{,}131\,9524$ $\quad$ $= 0{,}131\,9524$

$\operatorname{Log}\cos\psi = 0{,}982\,2841 - 1$, $\quad$ $\operatorname{Log}\sin\psi = 0{,}447\,0062 - 1$.

$\operatorname{Log}(a.e^m.\theta(\xi,q.\cos\psi)) = 0{,}123\,7704$, $\operatorname{Log}(a.\,e^m.\,\theta(\xi,q.\sin\psi)) = 0{,}588\,4925 - 1$

$\theta x = 1{,}329\,751 - i.\,0{,}387\,6971$

$$\theta_1 x = a \,.\, e^m \,.\, \theta_1(\xi,q) \,.\, (\cos\psi - i \,.\, \sin\psi);$$

$$\text{Log}\,\theta_1(\xi,q) = 0{,}818\,6197 - 1 \qquad = 0{,}818\,6197 - 1$$

$$\text{Log}\,(a \,.\, e^m) = 0{,}131\,9524 \qquad = 0{,}131\,9524$$

$$\text{Log}\cos\psi = \underline{0{,}982\,2841 - 1} \qquad \text{Log}\sin\psi = \underline{0{,}447\,0062 - 1}$$

$$\text{Log}\,(a \,.\, e^m \,.\, \theta_1(\xi,q) \,.\, \cos\psi) = \underline{0{,}932\,8562 - 1}; \quad \underline{\text{Log}(a \,.\, e^m \,.\, \theta_1(\xi,q) \,.\, \sin\psi) = 0{,}397\,5783 - 1}$$

$$\underline{\theta_1 x = 0{,}856\,7541 - i \,.\, 0{,}249\,7919.}$$

$$\theta_2 x = a \,.\, e^m \,.\, \theta_3(\xi,q) \,.\, (\cos(\tfrac{\pi}{4} - \psi) + i \,.\, \sin(\tfrac{\pi}{4} - \psi));$$

$$\text{Log}\,\theta_3(\xi,q) = 0{,}990\,2520 - 1 \qquad = 0{,}990\,2520 - 1$$

$$\text{Log}\,(a \,.\, e^m) = 0{,}131\,9524 \qquad = 0{,}131\,9524$$

$$\text{Log}\cos(\tfrac{\pi}{4} - \psi) = \underline{0{,}942\,8824 - 1}, \qquad \text{Log}\sin(\tfrac{\pi}{4} - \psi) = \underline{0{,}682\,0747 - 1}$$

$$\underline{\text{Log}\,(a \,.\, e^m \,.\, \theta_3(\xi,q) \,.\, \cos(\tfrac{\pi}{4} - \psi)) = 0{,}065\,0868;}$$

$$\underline{\text{Log}\,(a \,.\, e^m \,.\, \theta_3(\xi,q) \,.\, \sin(\tfrac{\pi}{4} - \psi)) = 0{,}804\,2791 - 1;}$$

$$\underline{\theta_2 x = 1{,}161\,681 + i \,.\, 0{,}637\,2048.}$$

$$\theta_3 x = a \,.\, e^m \,.\, \theta_2(\xi,q) \,.\, (\cos(\tfrac{\pi}{4} - \psi) + i \,.\, \sin(\tfrac{\pi}{4} + \psi));$$

$$\text{Log}\,\theta_2(\xi,q) = 0{,}505\,1763 - 1 \qquad = 0{,}505\,1763 - 1$$

$$\text{Log}\,(a \,.\, e^m) = 0{,}131\,9524 \qquad = 0{,}131\,9524$$

$$\text{Log}\cos(\tfrac{\pi}{4} - \psi) = \underline{0{,}942\,8824 - 1}, \qquad \text{Log}\sin(\tfrac{\pi}{4} - \psi) = \underline{0{,}682\,0747 - 1}$$

$$\underline{\text{Log}\,(a \,.\, e^m \,.\, \theta_2(\xi,q) \,.\, \cos(\tfrac{\pi}{4} - \psi)) = 0{,}580\,0111 - 1;}$$

$$\underline{\text{Log}\,(a \,.\, e^m \,.\, \theta_2(\xi,q) \,.\, \sin(\tfrac{\pi}{4} - \psi)) = 0{,}319\,2034 - 1}$$

$$\underline{\theta_3 x = 0{,}380\,1991 + i \,.\, 0{,}208\,5467.}$$

103. Si le carré du module est une quantité réelle, mais négative, $k^2 = -l^2$, le nome sera négatif, et l'on emploiera alors pour le calcul des θfonctions les formules (1) du **83**. Si l'on désigne alors par q, $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K}'$ le nome et les intégrales complètes correspondantes au module $\mathfrak{l} = \dfrac{l}{\sqrt{1+l^2}}$, on aura:

$$q = -q, \; x = \frac{\pi u}{2K}, \; K = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1+l^2}}, \; \text{donc:} \; x = \frac{\pi u \,.\, \sqrt{1+l^2}}{2\mathfrak{K}},$$

(1) $$\theta\,(x,q) = \theta\,(x,-q) = \theta_3(x,q),$$

(2) $$\theta_1(x,q) = \theta_1(x,-q) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \,.\, \theta_1(x,q),$$

(3) $$\theta_2(x,q) = \theta_2(x,-q) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \,.\, \theta_2(x,q),$$

(4) $$\theta_3(x,q) = \theta_3(x,-q) = \theta(x,q).$$

(5) $$\sin\text{am}\,u = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}} \,.\, \frac{\sin\text{am}\,(u\sqrt{1+l^2},\mathfrak{l})}{\Delta\,\text{am}\,(u\sqrt{1+l^2},\mathfrak{l})} = \frac{1}{\sqrt{l}} \,.\, \frac{\theta_1(x,q)}{\theta_3(x,q)}.$$

(6) $$\cos\text{am}\,u = \frac{\cos\text{am}\,(u\sqrt{1+l^2},\mathfrak{l})}{\Delta\,\text{am}\,(u\sqrt{1+l^2},\mathfrak{l})} = \frac{\sqrt[4]{1+l^2}}{\sqrt{l}} \,.\, \frac{\theta_2(x,q)}{\theta_3(x,q)}.$$

(7) $$\Delta\,\mathrm{am}\,u = \frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,(u\sqrt{1+l^2}, \mathfrak{l})} = \sqrt[4]{1+l^2}\cdot\frac{\theta(x,q)}{\theta_3(x,q)}.$$

Exemple. Soit $k^2 = -\frac{1}{3}$, $u = 0{,}6\,.\sqrt{3}$. On a alors:

$\mathfrak{l} = \frac{1}{2}$, $u\sqrt{1+l^2} = 1{,}2$. Donc en vertu de l'exemple 1 du **100**:

$$\theta(x,q) = 1{,}022\,19540\,;\quad \theta_1(x,q) = 0{,}658\,5970\,;$$
$$\theta_2(x,q) = 0{,}320\,0194\,;\quad \theta_3(x,q) = 0{,}977\,804\,52.$$

De là on trouve:

$$\theta x = \theta_3(x,q) = \underline{0{,}977\,804\,52,}$$

$$\theta_1 x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,\theta_1(x,q)\,.\,(1-i);\quad \mathrm{Log}\,\theta_1(x,q) = 0{,}818\,6197 - 1$$
$$\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{0{,}849\,4850 - 1}$$
$$\mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,\theta_1(x,q)\right) = \underline{0{,}668\,1047 - 1}$$
$$\theta_1 x = \underline{0{,}465\,6984\,.\,(1-i).}$$

$$\theta_2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,\theta_2(x,q)\,.\,(1+i);\quad \mathrm{Log}\,\theta_2(x,q) = 0{,}505\,1763 - 1,$$
$$\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{0{,}849\,4850 - 1.}$$
$$\mathrm{Log}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,\theta_2(x,q)\right) = \underline{0{,}354\,6613 - 1}$$
$$\theta_2 x = \underline{0{,}226\,2879\,.\,(1-i).}$$

$$\theta_3 x = \theta(x,q) = \underline{1{,}022\,195\,40.}$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{3}}\,;\quad \frac{1}{\sqrt{l}} = \sqrt[4]{3},\quad \frac{\sqrt[4]{1+l^2}}{\sqrt{l}} = \sqrt{2},\quad \sqrt[4]{1+l^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}.$$

$$\sin\mathrm{am}\,u = \frac{1}{\sqrt{l}}\cdot\frac{\theta_1(x,q)}{\theta_3(x,q)};\quad \mathrm{Log}\,\frac{1}{\sqrt{l}} = 0{,}119\,2803$$
$$\mathrm{Log}\,\theta_1(x,q) = \underline{0{,}818\,6197 - 1}$$
$$0{,}937\,9000 - 1$$
$$\mathrm{Log}\,\theta_3(x,q) = \underline{0{,}990\,2520 - 1}$$
$$\mathrm{Log}\sin\mathrm{am}\,u = \underline{0{,}947\,6480 - 1}$$
$$\sin\mathrm{am}\,u = 0{,}886\,4373,\ \mathrm{am}\,u = 62^0\,25'\,44'',1$$

$$\cos\mathrm{am}\,u = \frac{\sqrt[4]{1+l^2}}{\sqrt{l}}\cdot\frac{\theta_2(x,q)}{\theta_3(x,q)};\quad \mathrm{Log}\,\frac{\sqrt[4]{1+l^2}}{\sqrt{l}} = 0.150\,5150$$
$$\mathrm{Log}\,\theta_2(x,q) = \underline{0{,}505\,1763 - 1}$$
$$0{,}655\,6913 - 1$$
$$\mathrm{Log}\,\theta_3(x,q) = \underline{0{,}990\,2520 - 1}$$
$$\mathrm{Log}\cos\mathrm{am}\,u = \underline{0{,}665\,4393 - 1}$$
$$\cos\mathrm{am}\,u = 0{,}462\,8489,\ \mathrm{am}\,u = 62^0\,25'\,44'',0$$

$\Delta \operatorname{am} u = \sqrt[4]{1+l^2} \cdot \frac{\theta(x,q)}{\theta_3(x,q)}$; $\operatorname{Log}\sqrt[4]{1+l^2} = 0{,}031\,2347$

$\operatorname{Log}\theta(x,q) = 0{,}009\,5339$

$= 0{,}040\,7686$

$\operatorname{Log}\theta_3(x,q) = 0{,}990\,2520 - 1$

$\operatorname{Log}\Delta \operatorname{am} u = 0{,}050\,5166$

$\Delta \operatorname{am} u = 1{,}123\,3539$

104. Si le carré du module est une quantité imaginaire, ou si l'argument u est une quantité imaginaire, on procédera comme avec des quantités réelles. Soit $q = r(\cos\lambda + i.\sin\lambda)$, $u = s(\cos\mu + i.\sin\mu)$. On cherche alors suivant **99** l'intégrale complète $K = t(\cos\nu + i.\sin\nu)$. On aura alors:

$$x = \frac{\pi u}{2K} = \frac{\pi s}{2t}(\cos(\mu-\nu) + i\sin(\mu-\nu)) = a + ib$$

$$\cos 2x = \frac{e^{2b}+e^{-2b}}{2}.\cos 2a - i.\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}.\sin 2a = \rho(\cos\psi - i.\sin\psi),$$

$$\cos 4x = \frac{e^{4b}+e^{-4b}}{2}.\cos 4a - i.\frac{e^{4b}-e^{-4b}}{2}.\sin 4a = \rho'(\cos\psi' - i.\sin\psi'),$$

où $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{e^{4b}+2\cos 4a+e^{-4b}}$, $\operatorname{tang}\psi = \frac{e^{4b}-1}{e^{4b}+1}.\operatorname{tang} 2a$,

$\rho' = \frac{1}{2}\sqrt{e^{8b}+2\cos 8a+e^{-8b}}$, $\operatorname{tang}\psi' = \frac{e^{8b}-1}{e^{8b}+1}.\operatorname{tang} 4a$.

De là on trouve enfin:

$$q.\cos 2x = r\rho(\cos(\lambda-\psi)+i.\sin(\lambda-\psi)),$$

$q^4.\cos 4x = r^4\rho'(\cos(4\lambda-\psi')+i.\sin(4\lambda-\psi'))$, et ainsi de suite.

De même on aura:

$$\sin x = \frac{e^{b}+e^{-b}}{2}.\sin a + i.\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}.\cos a = \sigma(\cos\chi + i.\sin\chi).$$

$$\sin 3x = \frac{e^{3b}+e^{-3b}}{2}.\sin 3a + i.\frac{e^{3b}-e^{-3b}}{2}.\cos 3a = \sigma'(\cos\chi' + i.\sin\chi'),$$

où: $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2b}-2\cos 2a+e^{-2b}}$, $\operatorname{tang}\chi = \frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}.\operatorname{cotg} a$,

$\sigma' = \frac{1}{2}\sqrt{e^{6b}-2.\cos 6a+e^{-6b}}$, $\operatorname{tang}\chi' = \frac{e^{6b}-1}{e^{6b}+1}.\operatorname{cotg} 3a$,

$\sqrt[4]{q}.\sin x = \sigma\sqrt[4]{r}(\cos(\frac{1}{4}\lambda+\chi) + i\sin(\frac{1}{4}\lambda+\chi))$,

$\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x = \sigma' r^2\sqrt[4]{r}(\cos(\frac{9}{4}\lambda+\chi') + i\sin(\frac{9}{4}\lambda+\chi'))$, et ainsi de suite.

Enfin on aura:

$$\cos x = \frac{e^{b}+e^{-b}}{2}.\cos a - i.\frac{e^{b}-e^{-b}}{2}.\sin a = \mathfrak{r}(\cos\zeta - i\sin\zeta)$$

$$\cos 3x = \frac{e^{3b}+e^{-3b}}{2}.\cos 3a - i.\frac{e^{3b}-e^{-3b}}{2}.\sin 3a = \mathfrak{r}'(\cos\zeta' - i\sin\zeta')$$

où: $\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2b} + 2\cos 2a + e^{-2b}}$, $\operatorname{tang}\zeta = \frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}\operatorname{tang} a$,

$\mathfrak{r}' = \frac{1}{2}\sqrt{e^{6b} + 2\cos 6a + e^{-6b}}$, $\operatorname{tang}\zeta' = \frac{e^{6b}-1}{e^{6b}+1}\operatorname{tang} 3a$,

$\sqrt[4]{q}\,.\cos x = \mathfrak{r}\,.\sqrt[4]{r}\,(\cos(\frac{1}{4}\lambda - \zeta) + i\,.\sin(\frac{1}{4}\lambda - \zeta))$,

$\sqrt[4]{q^9}\,.\cos x = \mathfrak{r}'\,.r^2\,.\sqrt[4]{r}\,(\cos(\frac{9}{4}\lambda - \zeta') + i\,.\sin(\frac{9}{4}\lambda - \zeta'))$, et ainsi de suite.

Si ici e^b ou e^{-b} est une quantité assez grande pour que les séries ne convergent pas assez vîte, on peut réduire la quantité b de la manière suivante.

En vertu des formules (4) du **63** on a:

$\theta x = (-1)^m q^{m^2}.e^{-2mix}.\,\theta(x + mi\log q)$, $\theta_1 x = (-1)^m q^{m^2} e^{-2mix}.\,\theta_1(x + mi\log q)$,

$\theta_2 x = q^{m^2}.\,e^{-2mix}.\,\theta_2(x + mi\log q)$, $\theta_3 x = q^{m^2}.\,e^{-2mix}.\,\theta_3(x + mi\log q)$,

où m est un nombre entier quelconque positif ou négatif. On a maintenant: $x + mi\log q = a + ib + mi\,.\log r - m\lambda = (a - m\lambda) + i(b + m\,.\log r)$. Donc on réduira b à $b + m\log r$, où m est un nombre entier quelconque positif ou négatif. Or on peut toujours choisir m tel que la valeur numérique de $b + m\log r$ soit plus petite que $\frac{1}{2}\log r = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{Log} r}{\operatorname{Log} e}$. On aura alors dans les formules précédentes au lieu de $\frac{e^b \pm e^{-b}}{2}$ une quantité plus petite que $\frac{1}{2}(\sqrt{r} \pm \frac{1}{\sqrt{r}})$, au lieu de $\frac{e^{2b} \pm e^{-2b}}{2}$ une quantité plus petite que $\frac{1}{2}(r \pm \frac{1}{r})$, et ainsi de suite.

Exemple. Soit $k^2 = \frac{1+\sqrt{-1}}{2}$, $u = \frac{9(1+\sqrt{-3})}{4}$. On a alors en vertu de l'exemple du **99**:

$q = r(\cos\lambda + i\,.\sin\lambda)$, $\operatorname{Log} r = 0{,}730\,7254 - 2$, $\lambda = 66^0 1'31'',88$,

$K = t(\cos\nu + i\,.\sin\nu)$, $\operatorname{Log} t = 0{,}237\,1184$, $\nu = 10^0 45'34'',05$

$u = s(\cos\mu + i\,.\sin\mu)$, $\operatorname{Log} s = 0{,}653\,2125$, $\mu = 60^0$.

$x = a + ib = \frac{\pi s}{2t}(\cos(\mu - \nu) + i\,.\sin(\mu - \nu))$, $\mu - \nu = 49^0 14'25'',95$

$\operatorname{Log}\frac{\pi}{2} = 0{,}196\,1199 \qquad = 0{,}196\,1199$

$\operatorname{Log}\frac{s}{t} = 0{,}416\,0941 \qquad = 0{,}416\,0941$

$\operatorname{Log}\cos(\mu - \nu) = \underline{0{,}814\,8366 - 1}$; $\operatorname{Log}\sin(\mu - \nu) = \underline{0{,}879\,3581 - 1}$

$\operatorname{Log} a = \underline{0{,}427\,0506}$ $\qquad$ $\operatorname{Log} b = \underline{0{,}491\,5721}$

$a = \underline{\underline{2{,}673\,318}}$ $\qquad$ $b = \underline{\underline{3{,}101\,502}}$

$\operatorname{Log} r = \underline{0{,}730\,7254 - 2} = -1{,}269\,2746$

$\operatorname{Log}\operatorname{Log} r = 0{,}103\,5556_n$

$\operatorname{Log}\operatorname{Log} e = \underline{0{,}637\,7843 - 1}$

$\underline{0{,}465\,7713_n}$

$$\log r = \frac{\text{Log } r}{\text{Log } e} = -2{,}922\,613; \quad \lambda = 66^0 1' 31'',88 = 1{,}152\,3628.$$

Donc ici b est plus grande que la valeur numérique de $\frac{1}{2}\log r$. On pose donc dans les réductions indiquées plus haut $m = 1$, et réduit par là a à $a' = a - \lambda = 1{,}520\,955 = 87^0 8' 39'',5$, et b à $b' = b + \log r = 0{,}178\,889$. On cherche donc maintenant les θfonctions de $x' = x + i \cdot \log q = a' + ib'$. On a alors:

$$\cos 2x' = \rho(\cos\psi - i \cdot \sin\psi), \text{ où}$$

$$\rho = \tfrac{1}{2}\sqrt{e^{4b'} + 2\cos 4a' + e^{-4b'}}, \quad \text{tang}\,\psi = \frac{e^{4b'}-1}{e^{4b'}+1} \cdot \text{tang}\, 2a'.$$

$\text{Log } 4b' = 0{,}854\,6437 - 1$

$\text{Log Log } e = 0.637\,7843 - 1$

$\text{Log Log } e^{4b'} = 0{,}492\,4280 - 1;$

$\text{Log } e^{4b'} = 0{,}310\,7621; \quad \text{Log } e^{-4b'} = 0{,}689\,2379 - 1; \quad \text{Log cos } 4a' = 0{,}991\,3114 - 1$

$e^{4b'} = 2{,}045\,324, \qquad e^{-4b'} = 0{,}488\,920, \qquad \cos 4a' = 0{,}980\,1925$

$4\rho^2 = 4.494\,629; \qquad e^{4b'} - 1 = 1{,}045\,324, \qquad e^{4b'} + 1 = 3{,}045\,324$

$\text{Log } (4\rho^2) = 0{,}652\,6938; \quad \text{Log } e^{4b'} - 1 = 0{,}019\,2510; \quad \text{Log } (e^{4b'} + 1) = 0{,}483\,6335$

$\text{Log } 2\rho = 0{,}326\,3469; \quad \text{Log}\left(\frac{e^{4b'}-1}{e^{4b'}+1}\right) = 0{,}535\,6175 - 1$

$\text{Log } \rho = 0{,}025\,3169; \quad \text{Log tang } 2a' = 0{,}000\,0610_n - 1$

$\text{Log tang } \psi = 0{,}535\,6785_n - 2; \qquad \psi = 178^0 2' 1'',63$

$q.\cos 2x' = r\rho(\cos(\lambda - \psi) + i.\sin(\lambda - \psi)); \quad \text{Log } r = 0{,}730\,7254 - 2 \quad = 0{,}730\,7254 - 2$

$\lambda - \psi = -112^0 0' 29'',75 \quad \text{Log } \rho = 0{,}025\,3169 \qquad\qquad = 0{,}025\,3169$

$\text{Log cos } (\lambda - \psi) = 0{,}573\,7304_n - 1 \quad \text{Log sin } (\lambda - \psi) = 0{,}967\,1405_n - 1$

$0{,}329\,7727_n - 2 \qquad\qquad 0{,}723\,1828_n - 2$

$$q \cdot \cos 2x' = -0{,}021\,368\,43 \quad - i \cdot 0{,}052\,866\,77$$

$$\cos 4x' = \rho'(\cos\psi' - i \cdot \sin\psi'),$$

$$\text{où } \rho' = \tfrac{1}{2}\sqrt{e^{8b'} + 2\cos 8a' + e^{-8b'}}, \quad \text{tang}\,\psi' = \frac{e^{8b'}-1}{e^{8b'}+1} \cdot \text{tang}\, 4a'.$$

$\text{Log } e^{8b'} = 0{,}6215, \quad \text{Log } e^{-8b'} = 0{,}3785 - 1, \quad \text{Log cos } 8a' = 0{,}9645 - 1$

$e^{8b'} = 4{,}183 \qquad e^{-8b'} = 0{,}239 \qquad \cos 8a' = 0{,}922$

$4\rho'^2 = 6{,}266 \qquad e^{8b'} - 1 = 3{,}183, \qquad e^{8b'} + 1 = 5{,}183$

$\text{Log } (4\rho'^2) = 0{,}7970, \quad \text{Log}(e^{8b'} - 1) = 0{,}5028, \quad \text{Log } (e^{8b'} + 1) = 0{,}7146$

$\text{Log } 2\rho' = 0{,}3985, \quad \text{Log}\left(\frac{e^{8b'}-1}{e^{8b'}+1}\right) = 0{,}7882 - 1$

$\text{Log}\,\rho' = 0{,}0975$ $\quad \text{Log tang}\,4a' = 0{,}3055_n - 1$

$\text{Log tang}\,\psi' = 0{,}0937_n - 1;\ \psi' = -7^0\,4'20''$

en remarquant que sin $4a'$ est une quantité négative, cos $4a'$ une quantité positive.

$q^4 \cdot \cos 4x' = r^4\rho'(\cos(4\lambda - \psi') + i \cdot \sin(4\lambda - \psi'))$;

$\text{Log}\,r^4 = 0{,}9229 - 6 \qquad = 0{,}9229 - 6$

$4\lambda - \psi' = 271^0\,10'30''$; $\text{Log}\,\rho' = 0{,}0975 \qquad = 0{,}0975$

$\text{Log}\cos(4\lambda - \psi') = 0{,}3119 - 2 \qquad \text{Log}\sin(4\lambda - \psi') = 0{,}9999_n - 1$

$0{,}3323 - 7 \qquad 0{,}0203_n - 5$

$q^4 \cdot \cos 4x' = 0{,}000\,000\,215 - i \cdot 0{,}000\,010\,48$

$\theta x' = 1 - 2q \cdot \cos 2x' + 2q^4 \cdot \cos 4x' = 1{,}042\,737\,29 + i \cdot 0{,}105\,712\,58$

$\theta_3 x' = 1 + 2q \cdot \cos 2x' + 2q^4 \cdot \cos 4x' = 0{,}957\,263\,57 - i \cdot 0{,}105\,754\,50$

$\sin x' = \rho(\cos\chi + i \cdot \sin\chi)$, où:

$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{e^{2b'} - 2\cos 2a' + e^{-2b'}}$, $\text{tang}\,\chi = \frac{e^{2b'} - 1}{e^{2b'} + 1} \cdot \text{cotg}\,a'$.

$\text{Log}\,e^{2b'} = 0{,}155\,3810$, $\text{Log}\,e^{-2b'} = 0{,}844\,6190 - 1$, $\text{Log}\cos 2a' = 0{,}997\,8387_n - 1$.

$e^{2b'} = 1{,}430\,148 \qquad e^{-2b'} = 0{,}699\,228 \qquad \cos 2a' = -0{,}995\,036$

$4\rho^2 = 4{,}119\,448$, $\quad e^{2b'} - 1 = 0{,}430\,148$, $\quad e^{2b'} + 1 = 2{,}430\,148$

$\text{Log}\,4\rho^2 = 0{,}614\,8390$, $\text{Log}(e^{2b'} - 1) = 0{,}633\,6179 - 1$, $\text{Log}(e^{2b'} + 1) = 0{,}385\,6327$.

$\text{Log}\,2\rho = 0{,}307\,4195$, $\text{Log}\frac{e^{2b'} - 1}{e^{2b'} + 1} = 0{,}247\,9852 - 1$.

$\text{Log}\,\rho = 0{,}006\,3895$, $\text{Log}\,\text{cotg}\,a' = 0{,}697\,9489 - 2$.

$\text{Log tang}\,\chi = 0{,}945\,9341 - 3$, $\chi = 0^0\,30'\,21'',16$

$\sqrt[4]{q} \cdot \sin x' = \rho\sqrt[4]{r} \cdot (\cos(\frac{\lambda}{4} + \chi) + i \cdot \sin(\frac{\lambda}{4} + \chi))$, $\text{Log}\,r = 0{,}730\,7254 - 2$

$\frac{\lambda}{4} + \chi = 17^0\,0'\,44'',13$, $\text{Log}\sqrt[4]{r} = 0{,}682\,6813 - 1$, $\qquad = 0{,}682\,6813 - 1$

$\text{Log}\,\rho = 0{,}006\,3895 \qquad = 0{,}006\,3895$

$\text{Log}\cos(\frac{\lambda}{4} + \chi) = 0{,}980\,5679 - 1$; $\text{Log}\sin(\frac{\lambda}{4} + \chi) = 0{,}466\,2391 - 1$

$0{,}669\,6387 - 1, \qquad 0{,}155\,3099 - 1$

$\sqrt[4]{q} \cdot \sin x' = 0{,}467\,3462 + i \cdot 0{,}142\,9914$

$\sin 3x' = \rho'(\cos\chi' + i \sin\chi')$, où:

$\rho' = \frac{1}{2}\sqrt{e^{6b'} - 2\cos 6a' + e^{-6b'}}$, $\text{tang}\,\chi' = \frac{e^{6b'} - 1}{e^{6b'} + 1} \cdot \text{cotg}\,3a'$

$\text{Log}\,e^{6b'} = 0{,}466\,14$ $\text{Log}\,e^{-6b'} = 0.533\,86 - 1$, $\text{Log}\cos 6a' = 0{,}980\,28_n - 1$

$e^{6b'} = 2{,}9251 \qquad e^{-6b'} = 0{,}3419 \qquad \cos 6a' = -0{,}9556$

$4\rho'^2 = 5{,}1782$, $\quad e^{6b'} - 1 = 1{,}9251$, $\quad e^{6b'} + 1 = 3{,}9251$

$\text{Log}\,4\rho'^2 = 0{,}714\,18$, $\text{Log}(e^{6b'} - 1) = 0{,}284\,45$, $\quad \text{Log}(e^{6b'} + 1) = 0{,}593\,85$

$\text{Log}\,2\rho' = 0{,}357\,09$, $\qquad \text{Log}(\frac{e^{6b'} - 1}{e^{6b'} + 1}) = 0{,}69060 - 1$.

$$\text{Log } \rho' = 0{,}056\,06, \quad \text{Log cotg } 3a' = 0{,}177\,96 - 1$$
$$\text{Log tang } \chi' = 0{,}868\,56 - 2, \quad \chi' = -175^0 46' 28'',$$

en remarquant que sin 3a′ et cos 3a′ sont tous les deux des quantités négatives.

$$\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x' = \rho'.\sqrt[4]{r^9}\left(\cos\left(\frac{9\lambda}{4}+\chi'\right)+i.\sin\left(\frac{9\lambda}{4}+\chi'\right)\right),$$

$$\frac{9\lambda}{4}+\chi' = -27^0 13' 1'', \quad \text{Log}\sqrt[4]{r^9} = 0{,}144\,13 - 3 \qquad = 0{,}144\,13 - 3$$
$$\text{Log } \rho' = 0{,}056\,06 \qquad = 0{,}056\,06$$
$$\text{Log cos}\left(\frac{9\lambda}{4}+\chi'\right) = 0{,}949\,04 - 1, \quad \text{Log sin}\left(\frac{9\lambda}{4}+\chi'\right) = 0{,}660\,26_n - 1$$
$$0{,}149\,23 - 3 \qquad 0{,}860\,45_n - 4$$
$$\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x' = 0{,}001\,4100 - i.0{,}000\,7252$$

$$\theta_1 x' = 2\sqrt[4]{q}.\sin x' - 2\sqrt[4]{q^9}.\sin 3x' = 0{,}931\,8724 + i.0{,}287\,4332$$

$\cos x' = \mathfrak{r}(\cos\zeta - i.\sin\zeta)$, où :

$$\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2}\sqrt{e^{2b'} + 2\cos 2a' + e^{-2b'}}, \quad \text{tang } \zeta = \frac{e^{2b'}-1}{e^{2b'}+1}.\text{tang } a'$$

$$4\mathfrak{r}^2 = e^{2b'} + 2\cos 2a' + e^{-2b'} = 0{,}139\,304; \qquad \text{Log}\left(\frac{e^{2b'}-1}{e^{2b'}+1}\right) = 0{,}247\,9852 - 1$$
$$\text{Log}(4\mathfrak{r}^2) = 0{,}143\,9636 - 1; \quad \text{Log tang } a' = 1{,}302\,0511$$
$$\text{Log } 2\mathfrak{r} = 0{,}571\,9818 - 1; \quad \text{Log tang } \zeta = 0{,}550\,0363$$
$$\text{Log } \mathfrak{r} = 0{,}270\,9518 - 1; \qquad \zeta = 74^0 15' 40{,}''97$$

$$\sqrt[4]{q}.\cos x' = \mathfrak{r}.\sqrt[4]{r}\left(\cos\left(\frac{\lambda}{4}-\zeta\right)+i\sin\left(\frac{\lambda}{4}-\zeta\right)\right), \quad \frac{\lambda}{4}-\zeta = -57^0 45' 18'',0$$

$$\text{Log } \mathfrak{r} = 0{,}270\,9518 - 1 \qquad = 0{,}270\,9518 - 1$$
$$\text{Log}\sqrt[4]{r} = 0{,}682\,6813 - 1 \qquad = 0{,}682\,6813 - 1$$
$$\text{Log cos}\left(\frac{\lambda}{4}-\zeta\right) = 0{,}727\,1676 - 1, \quad \text{Log sin}\left(\frac{\lambda}{4}-\zeta\right) = 0{,}927\,2545_n - 1$$
$$0{,}680\,8007 - 2, \qquad 0{,}880\,8876_n - 2$$
$$\sqrt[4]{q}\cos x' = 0{,}047\,9513 - i.0{,}076\,0129$$

$\cos 3x' = \mathfrak{r}'(\cos\zeta' - i.\sin\zeta')$, où :

$$\mathfrak{r}' = \tfrac{1}{2}\sqrt{e^{6b'} + 2\cos 6a' + e^{-6b'}}, \quad \text{tang } \zeta' = \frac{e^{6b'}-1}{e^{6b'}+1}.\text{tang } 3a'.$$

$$4\mathfrak{r}'^2 = e^{6b'} + 2\cos 6a' + e^{6b'} = 1{,}3558; \quad \text{Log}\left(\frac{e^{6b'}-1}{e^{6b'}+1}\right) = 0{,}6906 - 1,$$
$$\text{Log}(4\mathfrak{r}'^2) = 0{,}1322; \quad \text{Log tang } 3a' = 0{,}8220,$$
$$\text{Log } 2\mathfrak{r}' = 0{,}0661; \quad \text{Log tang } \zeta' = 0{,}5126,$$
$$\text{Log } \mathfrak{r}' = 0{,}7651 - 1; \qquad \zeta' = 72^0 55' 30''$$

$$\sqrt[4]{q^9}.\cos 3x' = \mathfrak{r}'.\sqrt[4]{r^9}\left(\cos\left(\tfrac{9}{4}\lambda-\zeta'\right)+i.\sin\left(\tfrac{9}{4}\lambda-\zeta'\right)\right), \quad \tfrac{9}{4}\lambda-\zeta' = 75^0 38'$$

$$\text{Log } \mathfrak{r}' = 0{,}7651 - 1 \qquad = 0{,}7651 - 1$$
$$\text{Log}\sqrt[4]{r^9} = 0{,}1441 - 3 \qquad = 0{,}1441 - 3$$

$$\text{Log cos}\left(\tfrac{9}{4}\lambda - \zeta'\right) = 0{,}3947 - 1, \quad \text{Log sin}\left(\tfrac{9}{4}\lambda - \zeta'\right) = 0{,}9862 - 1$$
$$0{,}3039 - 4 \qquad\qquad 0{,}8954 - 4$$

$$\sqrt[4]{q^9}.\cos 3x' = 0{,}000\,2013 + i\,.\,0{,}000\,7860.$$

$$\theta_2 x' = 2\sqrt[4]{q}.\cos x' + 2\sqrt[4]{q^9}.\cos 3x' = 0{,}096\,3052 - i\,.\,0{,}150\,4538.$$

De là on trouve de plus:

$$\theta x = -q\,.\,e^{-2ix}.\theta x', \quad \theta_1 x = -q\,.\,e^{-2ix}.\theta_1 x',$$
$$\theta_2 x = \;\; q\,.\,e^{-2ix}.\theta_2 x', \quad \theta_3 x = \;\; q\,.\,e^{-2ix}.\theta_3 x',$$

où $q = r(\cos\lambda + i\,.\,\sin\lambda)$, $e^{-2ix} = e^{2b}(\cos 2a - i\,.\,\sin 2a)$.

Pour calculer les valeurs des θfonctions de x on pose les θfonctions de x' sous les formes:

$\theta x' = c + i\,.\,d = r(\cos\alpha + i\,.\,\sin\alpha)$, $\theta_1 x' = c_1 + i\,.\,d_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\,.\,\sin\alpha_1)$,
$\theta_2 x' = c_2 + i\,.\,d_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\,.\,\sin\alpha_2)$, $\theta_3 x' = c_3 + i\,.\,d_3 = r_3(\cos\alpha_3 + i\,.\,\sin\alpha_3)$,
où $r = \sqrt{c^2+d^2}$, $\text{tang}\,\alpha = \frac{d}{c}$, $r_1 = \sqrt{c_1^2+d_1^2}$, $\text{tang}\,\alpha_1 = \frac{d_1}{c_1}$ et ainsi de suite.
On aura alors:

$$\theta x = -r\,.\,r\,.\,e^{2b}(\cos(\alpha + \lambda - 2a) + i\,.\,\sin(\alpha + \lambda - 2a)),$$
$$\theta_1 x = -r_1.r\,.\,e^{2b}(\cos(\alpha_1 + \lambda - 2a) + i\,.\,\sin(\alpha_1 + \lambda - 2a)),$$
$$\theta_2 x = \;\; r_2.r\,.\,e^{2b}(\cos(\alpha_2 + \lambda - 2a) + i\,.\,\sin(\alpha_2 + \lambda - 2a)),$$
$$\theta_3 x = \;\; r_3.r\,.\,e^{2b}(\cos(\alpha_3 + \lambda - 2a) + i\,.\,\sin(\alpha_3 + \lambda - 2a)).$$

On a maintenant: $2a = 5{,}346\,636 = 306^0 20' 22{,}7''$, $\lambda = 66^0 1' 31''{,}88$,
$2a - \lambda = 240^0 18' 50''{,}8$.

$\text{Log}\,2b = 0{,}792\,6021$
$\text{Log Log}\,e = 0{,}637\,7843 - 1$
$\text{Log}(2b\,.\,\text{Log}\,e) = 0{,}430\,3864$, $\text{Log}(e^{2b}) = 2{,}693\,9304$
$\text{Log}\,r = 0{,}730\,7254 - 2$
$\text{Log}(r\,.\,e^{2b}) = 1{,}424\,6558$

$c = 1{,}042\,737\,29$, $d = 0{,}105\,712\,58$
$\text{Log}\,c = 0{,}018\,1749$, $\text{Log}\,c^2 = 0{,}036\,3498$
$\text{Log}\,d = 0{,}024\,1267 - 1$, $\text{Log}\,d^2 = 0{,}048\,2534 - 2$
$\text{Log tang}\,\alpha = 0{,}005\,9518 - 1$ $\quad c^2 = 1{,}087\,3010$
$\alpha = 365^0 47' 19''{,}9$ $\quad d^2 = 0{,}011\,1752$
$2a - \lambda = 240^0 18' 50''{,}8$ $\quad r^2 = 1{,}098\,4762$
$\alpha + \lambda - 2a = 125^0 28' 29''{,}1$ $\quad \text{Log}(r^2) = 0{,}040\,7907$
$\text{Log}\,r = 0{,}020\,3953 \qquad = 0{,}020\,3953$
$\text{Log}(r\,.\,e^{2b}) = 1{,}424\,6558 \qquad = 1{,}424\,6558$

$\text{Log cos}(\alpha + \lambda - 2a) = 0{,}763\,6855_n - 1$; $\text{Log sin}(\alpha + \lambda - 2a) = 0{,}910\,8224 - 1.$
$1{,}208\,7366_n \qquad\qquad 1{,}355\,8735$

$$\theta x = 16{,}170\,989 - i\,.\,22{,}692\,037.$$

$c_1 = 0{,}931\,8724$, $d_1 = 0{,}287\,4332$

$\operatorname{Log} c_1 = 0{,}969\,3564 - 1$ $\operatorname{Log} c_1^2 = 0{,}938\,7128 - 1$

$\operatorname{Log} d_1 = 0{,}458\,5369 - 1$ $\operatorname{Log} d_1^2 = 0{,}917\,0738 - 2$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\alpha_1 = 0{,}489\,1805 - 1$ $c_1^2 = 0{,}868\,3860$

$\alpha_1 = 377^0\,8'\,32'',0$ $d_1^2 = 0{,}082\,6178$

$2a - \lambda = 240^0 18'50'',8$ $r_1^2 = 0{,}951\,0038$

$\alpha_1 + \lambda - 2a = 136^0 49'41'',2$; $\operatorname{Log}(r_1^2) = 0{,}978\,1822 - 1$

$\operatorname{Log} r_1 = 0{,}989\,0911 - 1 = 0{,}989\,0911 - 1$

$\operatorname{Log}(r \cdot e^{2b}) = 1{,}424\,6558 = 1{,}424\,6558$

$\operatorname{Log}\cos(\alpha_1 + \lambda - 2a) = 0{,}862\,9089_n - 1$. $\operatorname{Log}\sin(\alpha_1 + \lambda - 2a) = 0{,}835\,1763 - 1$.

$1{,}276\,6558_n$ $1{,}248\,9232$

$\theta_1 x = 18{,}908\,44 - i \cdot 17{,}738\,76$

$c_2 = 0{,}096\,3052$, $d_2 = -0{,}150\,4538$,

$\operatorname{Log} c_2 = 0{,}983\,6497 - 2$, $\operatorname{Log} c_2^2 = 0{,}967\,2994 - 3$

$\operatorname{Log} d_2 = 0{,}177\,4032_n - 1$, $\operatorname{Log} d_2^2 = 0{,}354\,8064 - 2$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\alpha_2 = 0{,}193\,7535_n$ $c_2^2 = 0{,}009\,274\,69$

$\alpha_2 = 302^0\,37'\,23'',6$ $d_2^2 = 0{,}022\,636\,35$

$2a - \lambda = 240^0 18'\,50'',8$ $r_2^2 = 0{,}031\,911\,04$

$\alpha_2 + \lambda - 2a = 62^0\,18'\,32'',8$; $\operatorname{Log} r_2^2 = 0{,}503\,9409 - 2$

$\operatorname{Log} r_2 = 0{,}251\,9705 - 1 = 0{,}251\,9705 - 1$

$\operatorname{Log}(r \cdot e^{2b}) = 1{,}424\,6558 = 1{,}424\,6558$

$\operatorname{Log}\cos(\alpha_2 + \lambda - 2a) = 0{,}667\,1738 - 1$; $\operatorname{Log}\sin(\alpha_2 + \lambda - 2a) = 0{,}947\,1726 - 1$

$0{,}343\,8001$ $0{,}623\,7989$

$\theta_2 x = 2{,}206\,989 + i \cdot 4{,}205\,318$

$c_3 = 0{,}957\,263\,57$, $d_3 = -0{,}105\,754\,50$

$\operatorname{Log} c_3 = 0{,}981\,0315 - 1$; $\operatorname{Log} c_3^2 = 0{,}962\,0630 - 1$

$\operatorname{Log} d_3 = 0{,}024\,2988_n - 1$; $\operatorname{Log} d_3^2 = 0{,}048\,5976 - 2$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\alpha_3 = 0{,}043\,2673_n - 1$; $c_3^2 = 0{,}916\,3534$

$\alpha_3 = 353^0 41'44'',8$, $d_3^2 = 0{,}011\,1840$

$2a - \lambda = 240^0 18'50'',8$, $r_3^2 = 0{,}927\,5374$

$\alpha_3 + \lambda - 2a = 113^0 22'54'',0$; $\operatorname{Log} r_3^2 = 0{,}967\,3314 - 1$

$\operatorname{Log} r_3 = 0{,}983\,6657 - 1 = 0{,}983\,6657 - 1$

$\operatorname{Log}(r \cdot e^{2b}) = 1{,}424\,6558 = 1{,}424\,6558$

$\operatorname{Log}\cos(\alpha_3 + \lambda - 2a) = 0{,}598\,6310_n - 1$; $\operatorname{Log}\sin(\alpha_3 + \lambda - 2a) = 0{,}962\,7867 - 1$

$1{,}006\,9525_n$ $1{,}371\,1082$

$\theta_3 x = -10{,}161\,375 + i \cdot 23{,}502\,184$.

Pour trouver les fonctions elliptiques, on remarque qu'on a:

$$k^2 = \frac{1+\sqrt{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}\right);\quad k'^2 = \frac{1-\sqrt{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i.\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

donc: $$\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i.\sin\frac{\pi}{16}\right);\quad \sqrt{k'} = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\left(\cos\frac{\pi}{16} - i.\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} = \cos\frac{\pi}{8} - i.\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\frac{\theta_1 x}{\theta x} = \frac{r_1}{r}(\cos(\alpha_1 - \alpha) + i.\sin(\alpha_1 - \alpha)),$$

$$\frac{\theta_2 x}{\theta x} = -\frac{r_2}{r}(\cos(\alpha_2 - \alpha) + i.\sin(\alpha_2 - \alpha)),$$

$$\frac{\theta_3 x}{\theta x} = -\frac{r_3}{r}(\cos(\alpha_3 - \alpha) + i.\sin(\alpha_3 - \alpha)),$$

et enfin:

$$\sin am\, u = \frac{1}{\sqrt{k}}.\frac{\theta_1 x}{\theta x} = \sqrt[8]{2}.\frac{r_1}{r}.(\cos(\alpha_1 - \alpha - \frac{\pi}{16}) + i.\sin(\alpha_1 - \alpha - \frac{\pi}{16})),$$

$$\cos am\, u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}.\frac{\theta_2 x}{\theta x} = -\frac{r_2}{r}.(\cos(\alpha_2 - \alpha - \frac{\pi}{8}) + i.\sin(\alpha_2 - \alpha - \frac{\pi}{8})),$$

$$\Delta am\, u = \sqrt{k'}.\frac{\theta_3 x}{\theta x} = -\frac{1}{\sqrt[8]{2}}.\frac{r_3}{r}(\cos(\alpha_3 - \alpha - \frac{\pi}{16}) + i.\sin(\alpha_3 - \alpha - \frac{\pi}{16})).$$

$\alpha = 5^0 47' 19'',9$ $\quad \operatorname{Log}\sqrt[8]{2} = 0{,}037\,6287$

$\frac{\pi}{16} = 11^0 15'$ $\quad \operatorname{Log} r_1 = 0{,}989\,0911 - 1$

$\alpha + \frac{\pi}{16} = 17^0 2' 19'',9$, $\quad \operatorname{Log}(\sqrt[8]{2}.r_1) = 0{,}026\,7198$

$\alpha_1 = 17^0 8' 32'',0$ $\quad \operatorname{Log} r = 0{,}020\,3953$

$\alpha_1 - \alpha - \frac{\pi}{16} = 0^0 6' 12'',1$; $\quad \operatorname{Log}(\sqrt[8]{2}.\frac{r_1}{r}) = 0{,}006\,3245$ $\quad = 0{,}006\,3245$

$\operatorname{Log}\cos(\alpha_1 - \alpha - \frac{\pi}{16}) = 0{,}999\,9993 - 1$ $\quad \operatorname{Log}\sin(\alpha_1 - \alpha - \frac{\pi}{16}) = 0{,}256\,2342 - 3$

$0{,}006\,3238$ $\quad 0{,}262\,5587 - 3$

$$\sin am\, u = 1{,}014\,668 + i.\,0{,}001\,830\,45.$$

$\alpha = 5^0 47' 19'',9$; $\quad \operatorname{Log} r_2 = 0{,}251\,9705 - 1$

$\frac{\pi}{8} = 22^0 30'$ $\quad \operatorname{Log} r = 0{,}020\,3953$

$\alpha + \frac{\pi}{8} = 28^0 17' 19'',9$ $\quad \operatorname{Log}(\frac{r_2}{r}) = 0{,}231\,5752 - 1$ $\quad = 0{,}231\,5752 - 1$

$\alpha_2 = 302^0 37' 23'',6$ $\quad \operatorname{Log}\cos(\alpha_2 - \alpha - \frac{\pi}{8}) = 0{,}878\,3882 - 2,$

$\alpha_2 - \alpha - \frac{\pi}{8} = 274^0 20' 3'',7$ $\quad \operatorname{Log}\sin(\alpha_2 - \alpha - \frac{\pi}{8}) = 0{,}998\,7561_n - 1$

$0{,}109\,9634 - 2,$ $\quad 0{,}230\,3313_n - 1$

$$\cos am\, u = -0{,}012\,881\,41 + i.\,0{,}169\,9540.$$

$$\alpha + \frac{\pi}{16} = 17^0\ 2'\ 19'',9 \qquad \operatorname{Log}\sqrt[8]{2} = 0,037\ 6287$$

$$\alpha_3 = 359^0 41'\ 44'',8 \qquad \operatorname{Log} r = 0,020\ 3953$$

$$\alpha_3 - \alpha - \frac{\pi}{16} = 336^0 39'\ 24'',9 \qquad \operatorname{Log}(\sqrt[8]{2}.r) = 0,058\ 0240$$

$$\operatorname{Log} r_3 = 0,983\ 6657 - 1$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{r_3}{\sqrt[8]{2}.r}\right) = 0,925\ 6417 - 1 \qquad = 0,925\ 6417 - 1$$

$$\operatorname{Log}\cos(\alpha_3 - \alpha - \frac{\pi}{16}) = 0,962\ 9131 - 1, \quad \operatorname{Log}\sin(\alpha_3 - \alpha - \frac{\pi}{16}) = 0,597\ 9540_n - 1$$

$$0,888\ 5548 - 1 \qquad 0,523\ 5957_n - 1$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,u = -0,773\ 6682 + i\,.\,0,333\ 8841$$

Pour trouver l'amplitude: $\varphi = \mathrm{am}\,u$, on remarque que, si l'on a:

$$\cos\varphi + i\,.\,\sin\varphi = e^{i\varphi} = r(\cos\psi + i\sin\psi) = re^{i\psi},$$

on aura: $\varphi = \mathrm{am}\,u = \psi - i\,.\,\dfrac{\operatorname{Log} r}{\operatorname{Log} e}$.

Or on a ici:

$$\cos\varphi = -0,012\ 881\ 41 + i\,.\,0,169\ 954$$

$$i\,.\,\sin\varphi = +0,001\ 830\ 45 + i\,.\,1,014\ 668$$

$$\cos\varphi + i\,.\,\sin\varphi = -0,014\ 711\ 86 + i\,.\,1,184\ 622 = -a + ib = r(\cos\psi + i.\sin\psi)$$

où: $r^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{cotg}\psi = -\dfrac{a}{b}$.

$$\operatorname{Log} a = 0,167\ 6676 - 2, \quad \operatorname{Log} a^2 = 0,335\ 3352 - 4, \quad a^2 = 0,000\ 216$$

$$\operatorname{Log} b = 0,073\ 5798, \quad \operatorname{Log} b^2 = 0,147\ 1596, \quad b^2 = 1,403\ 329$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{cotg}\psi = 0,094\ 0878_n - 2, \qquad r^2 = 1,403\ 545$$

$$\psi = 90^0\ 42'\ 41'',477 \qquad \operatorname{Log} r^2 = 0,147\ 2264$$

$$= 1,583\ 2147 \qquad \operatorname{Log} r = 0,073\ 6132$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log} r = 0,866\ 9557 - 2$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log} e = 0,637\ 7843 - 1$$

$$0,229\ 1714 - 1$$

$$\frac{\operatorname{Log} r}{\operatorname{Log} e} = 0,169\ 5007$$

$$\varphi = \mathrm{am}\,u = 1,583\ 2147 - i\,.\,0,169\ 5007.$$

105. Si le module est réel, mais l'argument une quantité imaginaire, on peut aussi trouver les fonctions elliptiques à l'aide des formules du troisième chapitre.

Soit l'argument $u = u \pm i\,.\,v$. On trouvera alors les fonctions elliptiques: $\sin\mathrm{am}\,(u \pm iv)$, $\cos\mathrm{am}\,(u \pm iv)$, $\Delta\,\mathrm{am}\,(u \pm iv)$ au module k exprimées à l'aide des fonctions $\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u$, $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ au module k, et à l'aide des fonctions elliptiques $\sin\mathrm{am}\,v$, $\cos\mathrm{am}\,v$, $\Delta\,\mathrm{am}\,v$ au module complémentaire k'. Si l'on pose pour abréger:

$$\text{sin am } (u,k) = \xi, \quad \text{cos am } (u,k) = \eta, \quad \Delta \text{ am } (u,k) = \zeta,$$
$$\text{sin am } (v,k') = \xi', \quad \text{cos am } (v,k') = \eta', \quad \Delta \text{ am } (v,k') = \zeta',$$

les formules du **20** deviendront:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{sin am } (u+iv) = \dfrac{\xi\zeta' + i\,.\,\eta\zeta\xi'\eta'}{1-\zeta^2\xi'^2}, \quad \text{sin am } (u-iv) = \dfrac{\xi\zeta' - i\,.\,\eta\zeta\xi'\eta'}{1-\zeta^2\xi'^2}, \\ \text{cos am } (u+iv) = \dfrac{\eta\eta' - i\,.\,\xi\zeta\xi'\zeta'}{1-\zeta^2\xi'^2}, \quad \text{cos am } (u-iv) = \dfrac{\eta\eta' + i\,.\,\xi\zeta\xi'\zeta'}{1-\zeta^2\xi'^2}, \\ \Delta \text{ am } (u+iv) = \dfrac{\zeta\eta'\zeta' - i\,.\,k^2\xi\eta\xi'}{1-\zeta^2\xi'^2}, \quad \Delta \text{ am } (u-iv) = \dfrac{\zeta\eta'\zeta' + i\,.\,k^2\xi\eta\xi'}{1-\zeta^2\xi'^2}. \end{cases}$$

Pour trouver l'amplitude: $\varphi = \text{am } u = \text{am } (u+iv)$, on procéde comme dans l'exemple du paragraphe précédent, et forme l'équation:

$$\cos \text{am } (u+iv) + i\,.\,\sin \text{am } (u+iv) = e^{i\,.\,\text{am}(u+iv)} = r(\cos\psi + i\sin\psi) = re^{i\psi},$$

de laquelle on tire:

$$\varphi = \text{am } u = \text{am } (u+iv) = \psi - i\,.\,\frac{\text{Log } r}{\text{Log } e}.$$

Si l'on change ici partout le signe de i, on aura:

$$\text{am } (u-iv) = \psi + i\,.\,\frac{\text{Log } r}{\text{Log } e}.$$

Or on a:

$$\cos \text{am } (u+iv) + i \sin \text{am } (u+iv) = \frac{(\eta\eta' - i.\xi\zeta\xi'\zeta') + i(\xi\zeta' + i.\eta\zeta\xi'\eta')}{1-\zeta^2\xi'^2} = \frac{\eta\eta' + i\xi\zeta'}{1+\zeta\xi'}.$$

Donc on aura:

$$r\,.\,\cos\psi = \frac{\eta\eta'}{1+\zeta\xi'}, \quad r\sin\psi = \frac{\xi\zeta'}{1+\zeta\xi'}$$

et de là:

$$(2)\quad \begin{cases} r^2 = \dfrac{\eta^2\eta'^2 + \xi^2\zeta'^2}{(1+\zeta\xi')^2} = \dfrac{1-\zeta\xi'}{1+\zeta\xi'}, \quad \text{tang } \psi = \dfrac{\xi\zeta'}{\eta\eta'}, \\ \text{am } (u \pm iv) = \psi \mp i\,.\,\dfrac{\text{Log } r}{\text{Log } e}. \end{cases}$$

Si $u = o$, on aura: $\xi = o, \eta = 1, \zeta = 1$, et les formules (1) deviendront:

$$(3)\qquad \text{sin am } (iv) = \frac{i\xi'}{\eta'}, \quad \text{cos am } (iv) = \frac{1}{\eta'}, \quad \Delta \text{ am } (iv) = \frac{\zeta'}{\eta'},$$

ce qui coincide avec les formules (1) du **19**. Les formules (2) deviendront alors:

$$r^2 = \frac{1-\xi'}{1+\xi'}, \quad \psi = o, \quad \text{am } (iv) = -i\,.\,\frac{\text{Log } r}{\text{Log } e}.$$

Exemple 1. Soit $k = \frac{1}{2}$, $k' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $u = u + iv = 1 + i$, $u = 1$, $v = 1$.

On a alors:

$k = \frac{1}{2}, \alpha = 30^0$, $\sin\alpha_2 = \text{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha$, $\text{Log tang } \frac{1}{2}\alpha = \underline{0{,}428\,0525 - 1}$

$\text{Log sin } \alpha_2 = \underline{0{,}856\,1050 - 2}$

$\alpha_2 = 4^0\,7'\,1''{,}904\,; \quad \frac{1}{2}\alpha_2 = 2^0\,3'\,30''{,}952$

$$\text{Log } K = \text{Log } \frac{\pi}{2} - 2\,\text{Log}(\cos\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\cos\tfrac{1}{2}\alpha_2) + \tfrac{1}{4}\,\text{tang}^4\,\tfrac{1}{2}\alpha_2\,.\,\text{Log } e.$$

$\text{Log}\,\frac{\pi}{2} = 0{,}196\,1199$ $\qquad$ $\text{Log}\cos\frac{1}{2}\alpha = 0{,}984\,9438 - 1$

$\frac{1}{4}\tan g^4\frac{1}{2}\alpha_2\,\text{Log}\,e = 0{,}000\,0002$ $\qquad$ $\text{Log}\cos\frac{1}{2}\alpha_2 = 0{,}999\,7196 - 1$

$0{,}196\,1201$ $\qquad$ $\text{Log}(\cos\frac{1}{2}\alpha\,.\,\cos\frac{1}{2}\alpha_2) = 0{,}984\,6634 - 1$

$2\,\text{Log}(\cos\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\alpha_2) = 0{,}969\,3268 - 1$

$\text{Log}\,K = 0{,}226\,7933.$

$\varphi_4 = \frac{360^0.u}{K}$; $\text{Log}(360\,u) = 2{,}556\,3025$

$\text{Log}\,K = 0{,}226\,7933$

$\text{Log}\,\varphi_4 = 2{,}329\,5092,\ \varphi_4 = 213{,}55473 = 213^0 33' 17''{,}03$

$\sin(2\varphi_2 - \varphi_4) = \tan g^2\frac{1}{2}\alpha_2\,.\,\sin\varphi_4$; $\text{Log}\sin\varphi_4 = 0{,}742\,5156_n - 1$

$2\,.\,\text{Log}\tan g\frac{1}{2}\alpha_2 = 0{,}111\,2716 - 3$

$\text{Log}\sin(2\varphi_2 - \varphi_4) = 0{,}853\,7872_n - 4$; $2\varphi_2 - \varphi_4 = 0^0 2' 27''{,}30$

$2\varphi_2 = 213^0 35' 44''{,}33$; $\varphi_2 = 106^0 47' 52''{,}17$

$\sin(2\varphi - \varphi_2) = \tan g^2\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin\varphi_2$; $\text{Log}\sin\varphi_2 = 0{,}981\,0619 - 1$

$2\,.\,\text{Log}\tan g\frac{1}{2}\alpha = 0{,}856\,1050 - 2$

$\text{Log}\sin(2\varphi - \varphi_2) = 0{,}837\,1669 - 2$, $2\varphi - \varphi_2 = 3^0 56' 28''{,}44$

$2\varphi = 110^0 44' 20''{,}61$, $\varphi = 55^0 22' 10''{,}30$

$\text{Log}\,\xi = \text{Log}\sin\varphi = 0{,}915\,3123 - 1$; $\text{Log}\,\xi^2 = 0{,}830\,6246 - 1$

$\text{Log}\,\eta = \text{Log}\cos\varphi = 0{,}754\,5635 - 1$; $\text{Log}\,k^2 = 0{,}397\,9400 - 1$

$\text{Log}\,\delta = \text{Log}\,\Delta\varphi = 0{,}959\,7315 - 1$; $\text{Log}\,k^2\xi^2 = 0{,}228\,5646 - 1$, $k^2\xi^2 = 0{,}169\,2640$

$\text{Log}\,\delta^2 = 0{,}919\,4630 - 1$, $\delta^2 = 0{,}830\,7360$

$k' = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha' = 60^0$, $\sin\alpha'_2 = \tan g^2\frac{1}{2}\alpha'$, $\text{Log}\tan g\frac{1}{2}\alpha' = 0{,}761\,4394 - 1$

$\text{Log}\sin\alpha'_2 = 0{,}522\,8787 - 1$

$\alpha'_2 = 19^0 28' 16''{,}39$; $\frac{1}{2}\alpha'_2 = 9^0 44' 8''{,}195$

$\text{Log}\,K' = \text{Log}\frac{\pi}{2} - 2\,\text{Log}(\cos\frac{1}{2}\alpha'.\cos\frac{1}{2}\alpha'_2) + \frac{1}{4}\tan g^4\frac{1}{2}\alpha'_2.\ \text{Log}\,e.$

$\text{Log}\frac{\pi}{2} = 0{,}196\,1199$, $\text{Log}\tan g\frac{1}{2}\alpha'_2 = 0{,}2345 - 1$; $\text{Log}\cos\frac{1}{2}\alpha' = 0{,}937\,5306 - 1$

$\frac{1}{4}\tan g^4\frac{1}{2}\alpha'_2\,\text{Log}\,e = 0{,}000\,0941$ $\quad$ L. $\tan g^4\frac{1}{2}\alpha'_2 = 0{,}9380 - 4$; $\quad$ L. $\cos\frac{1}{2}\alpha'_2 = 0{,}993\,7001 - 1$

$0{,}196\,2140$ $\quad$ $\text{Log}\,\text{Log}\,e = 0{,}6378 - 1$; $\quad$ $0{,}931\,2307 - 1$

$2\text{L.}(\text{c.}\frac{1}{2}\alpha'.\text{c.}\frac{1}{2}\alpha'_2) = 0{,}862\,4614 - 1$ $\quad$ $0{,}5758 - 4$

$\text{Log}\,K' = 0{,}333\,7526$; $\tan g^4\frac{1}{2}\alpha'_2.\ \text{Log}\,e = 0{,}000\,3765$

$\varphi'_4 = \frac{360^0.\upsilon}{K'}$, $\text{Log}(360\,.\,\upsilon) = 2{,}556\,3025$

$\text{Log}\,K' = 0{,}333\,7526$

$\text{Log}\,\varphi'_4 = 2{,}222\,5499$, $\varphi'_4 = 166{,}93596 = 166^0\,56'\,9''{,}46$

$\sin(2\varphi'_2 - \varphi'_4) = \tan g^2\frac{1}{2}\alpha'_2\,.\,\sin\varphi_4$; $\text{Log}\sin\varphi'_4 = 0{,}354\,1852 - 1$

$2\,\text{Log}\tan g\frac{1}{2}\alpha'_2 = 0{,}468\,8972 - 2$

$\text{Log}\sin(2\varphi'_2 - \varphi'_4) = 0{,}823\,0824 - 3$, $2\varphi'_2 - \varphi'_4 = 0^0 22' 52''{,}50$

$$2\varphi'_2 = 167^0 19'1'',96, \quad \varphi'_2 = 83^0 39'30''98$$

$$\sin(2\varphi' - \varphi'_2) = \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\alpha' . \sin\varphi'_2 ; \quad \operatorname{Log}\sin\varphi'_2 = 0{,}997\,3345 - 1,$$

$$2\operatorname{Log}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha' = 0{,}522\,8787 - 1$$

$$\operatorname{Log}\sin(2\varphi' - \varphi'_2) = 0{,}520\,2132 - 1, \quad 2\varphi' - \varphi'_2 = 19^0 20'50''.35$$

$$2\varphi' = 103^0 0'21'',33 \quad \varphi' = 51^0 30'10''67$$

$$\operatorname{Log}\xi' = \operatorname{Log}\sin\varphi' = 0{,}893\,5622 - 1 ; \quad \operatorname{Log}\xi'^2 = 0{,}787\,1244 - 1$$

$$\operatorname{Log}\eta' = \operatorname{Log}\cos\varphi' = 0{,}794\,1213 - 1 ; \quad \operatorname{Log}k'^2 = 0{,}875\,0613 - 1$$

$$\operatorname{Log}\zeta' = \operatorname{Log}\Delta\varphi' = 0{,}866\,4403 - 1. \quad \operatorname{Log}k'^2\xi'^2 = 0{,}662\,1857 - 1; \quad k'^2\xi'^2 = 0{,}459\,3944$$

$$\operatorname{Log}\zeta'^2 = 0{,}732\,8805 - 1 ; \quad \zeta'^2 = 0{,}540\,6056$$

$$r^2 = \frac{1-\zeta\xi'}{1+\zeta\xi'} ; \quad \operatorname{Log}\zeta = 0{,}959\,7315 - 1 ;$$

$$\operatorname{Log}\xi' = 0{,}893\,5622 - 1$$

$$\operatorname{Log}(\zeta\xi') = 0{,}853\,2937 - 1 ; \quad \zeta\xi' = 0{,}713\,3352$$

$$\operatorname{Log}(1-\zeta\xi') = 0{,}457\,3743 - 1 ; \quad 1-\zeta\xi' = 0{,}286\,6648$$

$$\operatorname{Log}(1+\zeta\xi') = 0{,}233\,8423 ; \quad 1+\zeta\xi' = 1{,}713\,3352$$

$$\operatorname{Log}r^2 = 0{,}223\,5320 - 1 ; \quad \operatorname{Log}r = 0{,}611\,7660 - 1 = -\,0{,}388\,2340$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log}r = 0{,}589\,0936_n - 1$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log}e = 0{,}637\,7843 - 1$$

$$\frac{\operatorname{Log}r}{\operatorname{Log}e} = -\,0{,}893\,9419 ; \qquad 0{,}951\,3093_n - 1$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\xi\zeta'}{\eta\eta'} ; \quad \operatorname{Log}\xi = 0{,}915\,3123 - 1 ; \quad \operatorname{Log}\eta = 0{,}754\,5635 - 1$$

$$\operatorname{Log}\zeta' = 0{,}866\,4403 - 1 ; \quad \operatorname{Log}\eta' = 0{,}794\,1213 - 1$$

$$\operatorname{Log}\xi\zeta' = 0{,}781\,7526 - 1 ; \quad \operatorname{Log}\eta\eta' = 0{,}548\,6848 - 1$$

$$\operatorname{Log}\eta\eta' = 0{,}548\,6848 - 1$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\psi = 0{,}233\,0678 ; \quad \psi = 59^0 41'6'',81 = 1{,}041\,7037$$

$$\operatorname{am}(u \pm iv) = \psi \mp i \cdot \frac{\operatorname{Log}r}{\operatorname{Log}e} = 1{,}041\,7037 \pm i \,.\, 0{,}893\,9419$$

$$\sin\operatorname{am}(u \pm iv) = \frac{\xi\zeta' \pm i \,.\, \eta\zeta\xi'\eta'}{1-\zeta^2\xi'^2} ;$$

$$\operatorname{Log}\xi = 0{,}915\,3123 - 1 ; \quad \operatorname{Log}\eta = 0{,}754\,5635 - 1 ; \quad \operatorname{L.}(1-\zeta\xi') = 0{,}457\,3743 - 1$$

$$\operatorname{Log}\zeta' = 0{,}866\,4403 - 1 ; \quad \operatorname{Log}\zeta = 0{,}959\,7315 - 1 ; \quad \operatorname{L.}(1+\zeta\xi') = 0{,}233\,8423$$

$$\operatorname{Log}(\xi\zeta') = 0{,}781\,7526 - 1 ; \quad \operatorname{Log}\xi' = 0{,}893\,5622 - 1 ; \quad \operatorname{L.}(1-\zeta^2\xi'^2) = 0{,}691\,2166 - 1$$

$$\operatorname{Log}(1-\zeta^2\xi'^2) = 0{,}691\,2166 - 1 ; \quad \operatorname{Log}\eta' = 0{,}794\,1213 - 1 ;$$

$$0{,}090\,5360 ; \quad \operatorname{Log}(\eta\zeta\xi'\eta') = 0{,}401\,9785 - 1$$

$$\operatorname{Log}(1-\zeta^2\xi'^2) = 0{,}691\,2166 - 1$$

$$0{,}710\,7619 - 1.$$

$$\sin\operatorname{am}(u \pm iv) = 1{,}231\,788 \pm i.0{,}513\,7619$$

$$\operatorname{cos\,am}(u \pm iv) = \frac{\eta\eta' \mp i \cdot \xi\zeta\xi'\zeta'}{1 - \zeta^2\xi'^2};$$

$\operatorname{Log}\eta = 0{,}754\,5635 - 1$; $\operatorname{Log}\xi = 0{,}915\,3123 - 1$

$\operatorname{Log}\eta' = 0{,}794\,1213 - 1$; $\operatorname{Log}\zeta = 0{,}959\,7315 - 1$

$\operatorname{Log}(\eta\eta') = 0{,}548\,6848 - 1$; $\operatorname{Log}\xi' = 0{,}893\,5622 - 1$

$\operatorname{Log}(1-\zeta^2\xi'^2) = 0{,}691\,2166 - 1$; $\operatorname{Log}\zeta' = 0{,}866\,4403 - 1$

$0{,}857\,4682 - 1$; $\operatorname{Log}(\xi\zeta\xi'\zeta') = 0{,}635\,0463 - 1$

$\operatorname{Log}(1-\zeta^2\xi'^2) = 0{,}691\,2166 - 1$

$0{,}943\,8297 - 1$

$$\operatorname{cos\,am}(u \pm iv) = 0{,}720\,2250 \mp i \cdot 0{,}878\,6780$$

$$\Delta\operatorname{am}(u \pm iv) = \frac{\zeta\eta'\zeta' \mp i \cdot k^2\xi\eta\xi'}{1 - \zeta^2\xi'^2};$$

$\operatorname{Log}\zeta = 0{,}959\,7315 - 1$; $\operatorname{Log}\xi = 0{,}915\,3123 - 1$

$\operatorname{Log}\eta' = 0{,}794\,1213 - 1$ $\operatorname{Log}\eta = 0{,}754\,5635 - 1$

$\operatorname{Log}\zeta' = 0{,}866\,4403 - 1$ $\operatorname{Log}\xi' = 0{,}893\,5622 - 1$

$\operatorname{Log}(\zeta\eta'\zeta') = 0{,}620\,2931 - 1$ $\operatorname{Log}k^2 = 0{,}397\,9400 - 1$

$\operatorname{Log}(1-\zeta^2\xi'^2) = 0{,}691\,2166 - 1$; $\operatorname{Log}(k^2\xi\eta\xi') = 0{,}961\,3780 - 2$

$0{,}929\,0765 - 1$; $\operatorname{Log}(1-\zeta^2\xi'^2) = 0{,}691\,2166 - 1$

$0{,}270\,1614 - 1$

$$\Delta\operatorname{am}(u \pm iv) = 0{,}849\,3300 \mp i \cdot 0{,}186\,2779$$

Exemple 2. Soit $k^2 = \frac{3}{4}$, $u = i \cdot 1{,}_2$. On a alors $k' = \frac{1}{2}$, donc en vertu de l'exemple 1 du **100**:

$\operatorname{Log}\xi' = 0{,}959\,6007 - 1$; $\operatorname{Log}\eta' = 0{,}614\,9226 - 1$; $\operatorname{Log}\zeta' = 0{,}949\,4834 - 1$.

Donc on aura:

$\operatorname{sin\,am}u = \frac{i\xi'}{\eta'}$, $\operatorname{Log}\frac{\xi'}{\eta'} = 0{,}344\,6781$; $\operatorname{sin\,am}u = i \cdot 2{,}211\,455$

$\operatorname{cos\,am}u = \frac{1}{\eta'}$, $\operatorname{Log}\frac{1}{\eta'} = 0{,}385\,0774$; $\operatorname{cos\,am}u = 2{,}427\,042$

$\Delta\operatorname{am}u = \frac{\zeta'}{\eta'}$, $\operatorname{Log}\frac{\zeta'}{\eta'} = 0{,}334\,5608$; $\Delta\operatorname{am}u = 2{,}160\,532$

$r^2 = \frac{1-\xi'}{1+\xi'}$; $\xi' = 0{,}911\,1727$; $1-\xi' = 0{,}088\,8273$; $1+\xi' = 1{,}911\,1727$

$\operatorname{Log}1-\xi' = 0{,}948\,5465 - 2$

$\operatorname{Log}1+\xi' = 0{,}281\,2999$

$\operatorname{Log}r^2 = 0{,}667\,2466 - 2$; $\operatorname{Log}r = 0{,}333\,6233 - 1 = -0{,}666\,3767$

$\operatorname{Log}\operatorname{Log}r = 0{,}823\,7198_n - 1$

$\operatorname{Log}\operatorname{Log}e = 0{,}637\,7843 - 1$

$0{,}185\,9355_n$

$$\operatorname{am}u = -i \cdot \frac{\operatorname{Log}r}{\operatorname{Log}e}; \qquad \frac{\operatorname{Log}r}{\operatorname{Log}e} = -1{,}534\,389; \quad \operatorname{am}u = i \cdot 1{,}534\,389.$$

106. Pour trouver la valeur numérique de l'intégrale elliptique u, si l'on en connaît l'amplitude $\varphi = \text{am } u$, on doit résoudre par rapport à x une équation quelconque des suivantes:

$$\sqrt{k} \cdot \sin \text{am } u = \sqrt{k} \cdot \sin \varphi = \frac{\theta_1 x}{\theta x}, \quad \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}} \cdot \cos \text{am } u = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}} \cdot \cos \varphi = \frac{\theta_2 x}{\theta x}.$$

$$\frac{\Delta \text{am } u}{\sqrt{k'}} = \frac{\Delta \varphi}{\sqrt{k'}} = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{k'}} = \frac{\theta_3 x}{\theta x}.$$

De x on trouvera alors u à l'aide de la formule: $u = \frac{2Kx}{\pi}$.

La plus facile à résoudre des trois équations précédentes est la dernière. Si l'on y substitue les développements de $\theta_3 x$ et θx en séries infinies suivant les puissances du nome q, on trouvera:

$$\frac{\Delta \varphi}{\sqrt{k'}} = \frac{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2 \varphi}}{\sqrt{k'}} = \frac{1 + 2q \cdot \cos 2x + 2q^4 \cdot \cos 4x + 2q^9 \cdot \cos 6x + \ldots}{1 - 2q \cdot \cos 2x + 2q^4 \cdot \cos 4x - 2q^9 \cdot \cos 6x + \ldots}$$

De là on tire:

$$\cos 2x = \frac{1}{2q} \cdot \frac{\Delta \varphi - \sqrt{k'}}{\Delta \varphi + \sqrt{k'}} \cdot \frac{1 + 2q^4 \cdot \cos 4x + 2q^{16} \cdot \cos 8x + \ldots}{1 + q^8 \cdot \frac{\cos 6x}{\cos 2x} + q^{24} \cdot \frac{\cos 10x}{\cos 2x} + \ldots},$$

et, si l'on effectue la division:

$$(1) \qquad \cos 2x = \frac{1}{2q} \cdot \frac{\Delta \varphi - \sqrt{k'}}{\Delta \varphi + \sqrt{k'}} \cdot \left\{ 1 + 2q^4 \cdot \cos 4x - q^8 \cdot \frac{\cos 6x}{\cos 2x} - \ldots \right\}.$$

Si le module k est réel et plus petit que l'unité on pose:

$$(2) \quad k = \sin \alpha, \; k' = \cos \alpha, \; \sin \alpha \cdot \sin \varphi = \sin \gamma, \; \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\cos \gamma} = \text{tang } \delta,$$

et on aura alors:

$$\Delta \varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \cos \gamma, \; \frac{\Delta \varphi - \sqrt{k'}}{\Delta \varphi + \sqrt{k'}} = \frac{1 - \text{tang } \delta}{1 + \text{tang } \delta} = \text{tang } (\tfrac{\pi}{4} - \delta).$$

Donc en substituant dans la formule (1) on trouvera:

$$(3) \quad \cos 2x = \cos \left(\frac{\pi u}{K}\right) = \frac{1}{2q} \cdot \text{tang } (\tfrac{\pi}{4} - \delta) \cdot \left\{ 1 + 2q^4 \cdot \cos 4x - q^8 \cdot \frac{\cos 6x}{\cos 2x} - \ldots \right\}.$$

Si $k \cdot \sin \varphi$ est une quantité très petite, dont on peut négliger la puissance quatrième, on trouvera directement, en développant $\frac{1}{\Delta \varphi}$ en série:

$$(4) \quad u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi} d\varphi \, (1 + \tfrac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi) = \varphi + \tfrac{1}{8} k^2 (2\varphi - \sin 2\varphi).$$

On peut du reste aussi déduire cette formule de la formule (3), si l'on y substitue: $q = \frac{1}{16} k^2 (1 + \frac{1}{2} k^2)$; on trouvera alors: $x = \varphi - \frac{1}{8} k^2 \cdot \sin 2\varphi$, et puisque $u = \frac{2Kx}{\pi}$, et $K = \frac{\pi}{2} (1 + \frac{1}{4} k^2)$, on aura la formule (4).

Si l'on fait usage des tables logarithmiques de 7 décimales, et que l'angle du module ne surpasse 30^0, on peut negliger q^4 et l'on aura alors:

$$(5) \quad \cos 2x = \cos \left(\frac{\pi u}{K}\right) = \frac{1}{2q} \cdot \text{tang } (\tfrac{\pi}{4} - \delta).$$

Si l'angle du module surpasse 30^0 sans surpasser 75^0, il faut employer les deux premiers termes de la série (3). On cherche alors une première approximation de l'angle $2x$ à l'aide de la formule (5) et substitue cette valeur dans le membre droit de l'équation:

$$(6)\quad \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) = \frac{1}{2q}\,.\,\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right).\left\{1 + 2q^4.\cos 4x\right\}.$$

Si l'angle du module surpasse 75^0, il est plus facile d'employer les développements des θfonctions suivant les puissances du nome complémentaire p. On doit alors préférer la formule:

$$\frac{\cos \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_2 x}{\theta_3 x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} - p^{\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2} - p^{\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(2-\frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(2+\frac{x}{\pi}\right)^2} - \ldots}{p^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(2-\frac{x}{\pi}\right)^2} + p^{\left(2+\frac{x}{\pi}\right)^2} + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1 - p\left(p^{\frac{2x}{\pi}} + p^{-\frac{2x}{\pi}}\right) + p^4\left(p^{\frac{4x}{\pi}} + p^{-\frac{4x}{\pi}}\right) - \ldots}{1 + p\left(p^{\frac{2x}{\pi}} + p^{-\frac{2x}{\pi}}\right) + p^4\left(p^{\frac{4x}{\pi}} + p^{-\frac{4x}{\pi}}\right) + \ldots}.$$

Si l'angle du module est plus grand que 75^0, on peut ici négliger p^4, et on tire alors:

$$(7)\qquad p\left(p^{\frac{2x}{\pi}} + p^{-\frac{2x}{\pi}}\right) = \frac{\Delta\varphi - \sqrt{k}\,.\cos\varphi}{\Delta\varphi + \sqrt{k}\,.\cos\varphi}.$$

Si l'on pose maintenant:

$$(8)\quad \begin{cases} k = \sin\alpha,\ \sqrt{k} = \sqrt{\sin\alpha} = \cos\beta',\ \sin\alpha\,.\,\sin\varphi = \sin\gamma \\ \dfrac{\cos\beta'.\cos\varphi}{\cos\gamma} = \operatorname{tang}\delta',\ p^{-\frac{2x}{\pi}} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\xi, \end{cases}$$

on aura: $\Delta\varphi = \cos\gamma$,

$$\frac{\Delta\varphi - \sqrt{k}\,.\cos\varphi}{\Delta\varphi + \sqrt{k}\,.\cos\varphi} = \frac{\cos\gamma - \cos\beta'\,.\cos\varphi}{\cos\gamma + \cos\beta'\,.\cos\varphi} = \frac{1 - \operatorname{tang}\delta'}{1 + \operatorname{tang}\delta'} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \delta'\right),$$

$$p^{\frac{2x}{\pi}} + p^{-\frac{2x}{\pi}} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\xi + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\xi = \frac{2}{\sin\xi},\ \text{donc:}$$

$$(9)\quad \sin\xi = \frac{2p}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \delta'\right)} = 2p\,.\,\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \delta'\right),$$

$$\text{et:}\ x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\operatorname{Log}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\xi}{\operatorname{Log}\left(\frac{1}{p}\right)},\ u = \frac{2Kx}{\pi} = K\,.\,\frac{\operatorname{Log}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\xi}{\operatorname{Log}\left(\frac{1}{p}\right)},$$

$$\text{ou, puisque:}\ p = e^{-\frac{\pi K}{K'}},\ \operatorname{Log}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\pi K}{K'}\,.\,\operatorname{Log} e:$$

$$(10) \qquad u = \frac{K'}{\pi} \cdot \frac{\text{Log tang } \frac{1}{2}\xi}{\text{Log e}}.$$

Si dans les formules (12) du **96** on change k en k', donc α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\cos\beta = \sqrt{\cos\alpha}$ en $\cos\beta' = \sqrt{\sin\alpha}$, q en p, K en K', on aura:

$$p = \tfrac{1}{2}\tan g^2 \tfrac{1}{2}\beta'\,(1 + \tfrac{1}{8}\tan g^8 \tfrac{1}{2}\beta'),\ K' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{4}\cdot \tan g^8 \frac{1}{2}\beta'}{\cos^4 \frac{1}{2}\beta'}$$

ou, puisque on peut ici négliger p^4, donc $\tan g^8 \frac{1}{2}\beta'$:

$$p = \tfrac{1}{2}\tan g^2 \tfrac{1}{2}\beta',\ K' = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos^4 \frac{1}{2}\beta'}.$$

En substituant ces valeurs dans les formules (9) et (10) on aura donc:

$$(11) \quad \cos\beta' = \sqrt{\sin\alpha},\ \sin\xi = \tan g^2 \tfrac{1}{2}\beta' \cdot \tan g\left(\frac{\pi}{4} + \delta'\right),\ u = \frac{\text{Log tang } \frac{1}{2}\xi}{2\ \text{Log e} \cdot \cos^4 \frac{1}{2}\beta'}.$$

On remarque ici que puisque $p < 1$, on a: $p^{\frac{2x}{\pi}} = \tan g \frac{1}{2}\xi > 1$, donc $\xi > \frac{\pi}{2}$.

Si l'angle du module surpasse 89° on trouvera en développant suivant les puissances ascendantes du module complémentaire k':

$$(11)\ u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi \sqrt{1 + k'^2 \cdot \tan g^2\varphi}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}(1 - \tfrac{1}{2}k'^2 \tan g^2\varphi) =$$

$$= \frac{\text{Log tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\text{Log e}} - \tfrac{1}{4}k'^2 \left\{ \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{\text{Log tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\text{Log e}} \right\}.$$

On peut du reste aussi facilement déduire cette formule de la formule (7) en y substituant les développements de $\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi}$, de $\sqrt{k}$ et de p suivant les puissances ascendantes de k'.

Exemple 1. Soit $\alpha = 1^0$, $k = \sin 1^0 = 0{,}017\,452\,406$, $\varphi = 60^0$.

On a alors: $u = \varphi + \frac{1}{8}k^2(2\varphi - \sin 2\varphi)$:

$2\varphi = 2{,}094$, $\text{Log } k = 0{,}242 - 2$

$\sin 2\varphi = 0{,}866$, $\text{Log } k^2 = 0{,}484 - 4$

$2\varphi - \sin 2\varphi = 1{,}228$, $\text{Log } 8 = 0{,}903$

$\text{Log } \frac{1}{8}k^2 = 0{,}581 - 5$

$\text{Log}(2\varphi - \sin 2\varphi) = 0{,}089$

$\text{Log}(\frac{1}{8}k^2(2\varphi - \sin 2\varphi)) = 0{,}670 - 5$, $\frac{1}{8}k^2(2\varphi - \sin 2\varphi) = 0{,}000\,0468$

$\varphi = 1{,}047\,1976$

$u = \varphi + \frac{1}{8}k^2(2\varphi - \sin 2\varphi) = 1{,}047\,2444$

Exemple 2. Soit $k^2 = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$, $\varphi = 60^0$. L'intégrale elliptique cherchée sera alors:

$$u = \int_0^{60^0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2}}$$

$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\varphi$; $\text{Log sin } \alpha = 0{,}849\,4850 - 1$

$\text{Log sin } \varphi = 0{,}937\,5306 - 1$

$$\text{Log sin } \gamma = 0{,}787\,0156 - 1,\ \gamma = 37^0\,45'\,40'',48$$

$$\text{tang } \delta = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\cos \gamma},\quad \text{Log cos } \alpha = 0{,}849\,4850 - 1$$

$$\text{Log } \sqrt{\cos \alpha} = 0{,}924\,7425 - 1$$

$$\text{Log cos } \gamma = 0{,}897\,9400 - 1$$

$$\text{Log tang } \delta = 0{,}026\,8025,\qquad \delta = 46^0\,46'\,0'',78$$

Dans l'exemple 10 du **96** nous avons trouvé: Log q = 0,635 6236 — 2; donc on aura comme une première approximation:

$$\cos 2x = \frac{1}{2q} \cdot \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right),\ \text{Log tang}\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) = 0{,}489\,2230_n - 2$$

$$\text{Log } 2q = 0{,}936\,6536 - 2$$

$$\text{Log cos } 2x = 0{,}552\,5694_n - 1$$

$$\pi - 2x = 69^0\,5'\,20'',09$$

$$2x = 110^0\,54'\,39'',91;\quad 4x = 221^0\,49'\,19'',82$$

De là on trouvera la valeur exacte de x par la formule:

$$\cos 2x = \frac{1}{2q} \cdot \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) \cdot \left\{1 + 2q^4 \cdot \cos 4x\right\}.$$

$$\text{Log cos } 4x = 0{,}872_n - 1$$

$$\text{Log } q^4 = 0{,}542 - 6$$

$$\text{Log } 2 = 0{,}301$$

$$\text{Log } (2q^4 \cdot \cos 4x) = 0{,}715_n - 6$$

$$2q^4 \cdot \cos 4x = -\ 0{,}000\,0052.$$

$$\text{Log}(1 + 2q^4 \cdot \cos 4x) = 2q^4 \cdot \cos 4x \cdot \text{Log e} = 0{,}999\,9977 - 1$$

$$\text{Log}\left(\frac{1}{2q} \cdot \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right)\right) = 0{,}552\,5694_n - 1.$$

$$\text{Log cos } 2x = 0{,}552\,5671_n - 1$$

$$\pi - 2x = 69^0\,5'\,20'',51,\quad 2x = 110^0\,54'\,39''_{49}$$

$$x = 55^0\,27'\,19'',74 = 199\ 639'',74$$

$u = \frac{2Kx}{\pi} = K \cdot \frac{x''}{324\,000''}$. Dans l'exemple 10 du **96** nous avons trouvé:

$$\text{Log K} = 0{,}268\,1273$$

$$\text{Log x} = 5{,}300\,2470$$

$$5{,}568\,3743$$

$$\text{Log } 324000 = 5{,}510\,5450$$

$$\text{Log u} = 0{,}057\,8293,\ u = 1{,}142\,429$$

Exemple 3. Soit $\alpha = 80^0$, $k = \sin 80^0 = 0{,}984\,8078$, $\varphi = 70^0$.

On a alors:

$$\cos \beta' = \sqrt{\sin \alpha};\ \text{Log sin } \alpha = 0{,}993\,3515 - 1.$$

$$\text{Log cos } \beta' = 0{,}996\,6757 - 1,\ \beta' = 7^0\,4'\,48'',5$$

$$\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \varphi;\ \text{Log sin } \alpha = 0{,}993\,3515 - 1.$$

$$\text{Log sin } \varphi = 0{,}972\,9858 - 1.$$

$$\text{Log sin } \gamma = 0{,}966\,3373 - 1,\ \gamma = 67^0 43' 52'',6$$

$$\text{tang } \delta' = \frac{\cos \beta' . \cos \varphi}{\cos \gamma};\ \text{Log cos } \beta' = 0{,}996\,6757 - 1$$

$$\text{Log cos } \varphi = 0{,}534\,0517 - 1$$

$$\text{Log } (\cos \beta' . \cos \varphi) = 0{,}530\,7274 - 1$$

$$\text{Log cos } \gamma = 0{,}578\,5831 - 1$$

$$\text{Log tang } \delta' = 0{,}952\,1443 - 1,\ \delta' = 41^0 50' 58'',59$$

$$\sin \xi = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} \beta' . \text{tang}(\tfrac{\pi}{4} + \delta');\ \tfrac{1}{2} \beta' = 3^0 32' 21'',25,\ \tfrac{\pi}{4} + \delta' = 86^0 50' 58'',59,$$

$$\text{Log tang } \tfrac{1}{2} \beta' = 0{,}791\,4422 - 2$$

$$\text{Log tang}^2 \tfrac{1}{2} \beta' = 0{,}582\,8844 - 3$$

$$\text{Log tang } (\tfrac{\pi}{4} + \delta') = 1{,}259\,3201$$

$$\text{Log sin } \xi = 0{,}842\,2045 - 2$$

$$\pi - \xi = 3^0 59' 14'',24,\ \xi = 176^0 0' 45'',76,\ \tfrac{1}{2} \xi = 88^0 0' 22'',88$$

$$u = \frac{\text{Log tang } \frac{1}{2} \xi}{2 \text{ Log e} . \cos^4 \frac{1}{2} \beta'};\ \text{Log cos} \tfrac{1}{2} \beta' = 0{,}999\,1705 - 1$$

$$\text{Log cos}^4 \tfrac{1}{2} \beta' = 0{,}996\,6820 - 1$$

$$\text{Log } (2 \text{ Log e}) = 0{,}938\,8143 - 1.$$

$$\text{Log } (2 \text{ Log e} . \cos^4 \tfrac{1}{2} \beta') = 0{,}935\,4963 - 1$$

$$\text{Log tang} \tfrac{1}{2} \xi = 1{,}458\,2996,\ \text{Log Log tg.} \tfrac{1}{2} \xi = 0{,}163\,8468$$

$$\text{Log } u = 0{,}228\,3505,\ u = 1{,}691\,806$$

Exemple 4. Soit $\alpha = 89^0$, $k = \sin 89^0 = 0{,}999\,8477$, $\varphi = 60^0$. On a alors :

$$u = \frac{\text{Log tang}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{\text{Log e}} - \tfrac{1}{4} k'^2 \left\{ \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{\text{Log tang}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{\text{Log e}} \right\}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = 75^0,\ \text{Log tang}(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\varphi}{2}) = 0{,}571\,9475$$

$$\text{Log Log tang } (\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\varphi}{2}) = 0{,}757\,3562 - 1$$

$$\text{Log Log e} = 0{,}637\,7843 - 1$$

$$0{,}119\,5719$$

$$\frac{\text{Log tang}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}{\text{Log e}} = 1{,}316\,9579$$

$$\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = 2\sqrt{3} = 3{,}464\,1016$$

$$2{,}147\,1437$$

$$\tfrac{1}{4} k'^2 = 0{,}000\,07619$$

$$\tfrac{1}{4} k'^2 \left\{ \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} - \frac{\text{Log tang}(\frac{\pi}{\varphi} + \frac{\varphi}{2})}{\text{Log e}} \right\} = 0{,}000\,1636$$

$$\frac{\text{Log tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{\text{Log e}} = 1{,}316\,9579$$

$$u = 1{,}316\,7943$$

107. Dans le cas précédent où le module est réel et plus petit que l'unité, on peut aussi directement employer la transformation de la formule (1) du **80**.

Si dans cette formule:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin^2\varphi}} = \frac{1+k_2}{2}\int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_2^2.\sin^2\varphi}} = \frac{1+k_2}{2}.u_2$$

où: $k_2 = \frac{1-k'}{1+k'}$, $\text{tang}\,(\varphi_2-\varphi) = k'.\text{tang}\,\varphi$, on pose comme auparavant:

$$(1)\quad \begin{cases} k = \sin\alpha,\ k_2 = \sin\alpha_2, \text{ on aura: } \sin\alpha_2 = \text{tang}^2\,\frac{1}{2}\alpha, \\ \frac{1+k_2}{2} = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha},\ \text{tang}\,(\varphi_2-\varphi) = \cos\alpha.\text{tang}\,\varphi,\ u = \frac{u_2}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}. \end{cases}$$

En continuant de la même manière, on aura de plus:

$$(2)\quad \begin{cases} k_4 = \sin\alpha_4 = \text{tang}^2\,\frac{1}{2}\alpha_2,\ \frac{1+k_4}{2} = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha_2},\ \text{tang}(\varphi_4-\varphi_2) = \cos\alpha_2.\text{tang}\,\varphi_2, \\ u_2 = \frac{1+k_4}{2}.u_4 = \frac{u_4}{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha_2},\ \text{donc: } u = \frac{u_4}{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha.\cos^2\frac{1}{2}\alpha_2}, \end{cases}$$

et ainsi de suite.

Quand on aura de cette manière trouvé une valeur de $k_n.\sin\varphi_n = \sin\alpha_n.\sin\varphi_n$ assez petite, on trouvera u_n à l'aide de la formule (4) du paragraphe précédent:

$$(3)\qquad u_n = \varphi_n + \tfrac{1}{8}\sin^2\alpha_n\,(2\varphi_n - \sin 2\varphi_n).$$

Exemple. Soit $k^2 = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$, $\varphi = 60^0$. On a alors:

$\sin\alpha_2 = \text{tang}^2\,\frac{1}{2}\alpha$; $\text{Log tang}\,\frac{1}{2}\alpha = 0{,}617\,2243 - 1$

$\text{Log sin}\,\alpha_2 = 0{,}234\,4486 - 1$, $\alpha_2 = 9^0 52' 45'',41$

$\frac{1}{2}\alpha_2 = 4^0 56' 22'',70$

$\sin\alpha_4 = \text{tang}^2\,\frac{1}{2}\alpha_2$; $\text{Log tang}\,\frac{1}{2}\alpha_2 = 0.936\,6505 - 2$

$\text{Log sin}\,\alpha_4 = 0{,}873\,3010 - 3$, $\alpha_4 = 0^0 25' 40'',743$

$\frac{1}{2}\alpha_4 = 0^0 12' 50'',371$

$\text{tang}(\varphi_2-\varphi) = \cos\alpha.\text{tang}\,\varphi$; $\text{Log cos}\,\alpha = 0{,}849\,4850 - 1$; $\varphi = 60^0$

$\text{Log tang}\,\varphi = 0{,}238\,5606$

$\text{Log tang}\,(\varphi_2 - \varphi) = 0{,}088\,0456$, $\varphi_2 - \varphi = 50^0 46' 6'',51$

$\varphi_2 = 110^0 46' 6'',51$

$\text{tang}(\varphi_4-\varphi_2) = \cos\alpha_2.\text{tang}\,\varphi_2$; $\text{Log cos}\,\alpha_2 = 0{,}993\,5118 - 1$

$\text{Log tang}\,\varphi_2 = 0{,}421\,0918_n$

$\text{Log tang}\,(\varphi_4 - \varphi_2) = 0{,}414\,6036_n$; $\varphi_4 - \varphi_2 = 111^0 3' 13'',90$

$\varphi_4 = 221^0 49' 20'',41 = 3{,}871\,5301$

$u_4 = \varphi_4 + \frac{1}{8}\sin^2\alpha_4(2\varphi_4 - \sin 2\varphi_4)$; $2\varphi_4 = 7{,}7431$

$\sin 2\varphi_4 = 0{,}9939$

$2\varphi_4 - \sin 2\varphi_4 = 6{,}7492$

$\text{Log}(2\varphi_4 - \sin 2\varphi_4) = 0{,}8293$

$\text{Log}\sin^2\alpha_4 = 0{,}7466 - 5$

$\text{Log}\frac{1}{8} = 0.0969 - 1$

$0.6728 - 5$

$\frac{1}{8}\sin^2\alpha_4(2\varphi_4 - \sin 2\varphi_4) = 0{,}000\,0471$

$\varphi_4 = 3{,}871\,5301$

$u_4 = 3{,}871\,5772$

$u = \frac{u_4}{4\cos^2\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos^2\frac{1}{2}\alpha_2}$, $\text{Log}\,2 = 0{,}301\,0300$

$\text{Log}\cos\frac{1}{2}\alpha = 0{,}965\,6153 - 1$

$\text{Log}\cos\frac{1}{2}\alpha_2 = 0{,}998\,3840 - 1$

$\text{Log}(2 \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha_2) = 0{,}265\,0293$

$\text{Log}(4\cos^2\frac{1}{2}\alpha \cdot \cos^2\frac{1}{2}\alpha_2) = 0{,}530\,0586$

$\text{Log}\,u_4 = 0.587\,8879$

$\text{Log}\,u = 0.057\,8293$, $u = 1{,}142\,429$.

108. Si le module k est réel, mais plus grand que l'unité, on emploiera la transformation donnée par la formule (8) du **84**. Si l'on y pose ku au lieu de u, on a:

$$\sin\text{am}(ku \cdot \mathfrak{h}) = k \cdot \sin\text{am}(u,k), \text{ où } \mathfrak{h} = \frac{1}{k}.$$

Donc, si l'on pose:

(1) $\sin\text{am}(u,k) = x$, $\mathfrak{h} = \frac{1}{k}$, $\sin\text{am}(ku, \mathfrak{h}) = \xi$, $ku = u$,

on aura:

(2) $$\xi = kx,\ u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\cdot\sqrt{1-\mathfrak{h}^2\xi^2}},\ u = \frac{u}{k}.$$

Exemple. Soit $k^2 = 2$, $x = \frac{\sqrt{6}}{4}$. On a alors: $\mathfrak{h}^2 = \frac{1}{2}$, $\xi = kx = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0$. En vertu de l'exemple du paragraphe précédent, on a alors:

$u = 1{,}142\,429$, $\text{Log}\,u = 0{,}057\,8293$,

Donc: $u = \frac{u}{k} = \frac{u}{\sqrt{2}}$, $\text{Log}\sqrt{2} = 0.150\,5150$

$\text{Log}\,u = 0{,}907\,3143 - 1$, $u = 0{,}807\,8194$

109. Si le carré du module, k^2, est une quantité négative, $k^2 = -l^2$, on emploiera la transformation donnée par la formule (3) du **83**. Si l'on y pose $k'u$ au lieu de u, on a:

$$\sin am\,(k'u,\ \mathfrak{k}) = k' \cdot \frac{\sin am\,(u,k)}{\Delta am\,(u,k)},$$

où, $k' = \sqrt{1+l^2}$, $k = -il$, $\mathfrak{k} = \frac{ik}{k'} = \frac{l}{\sqrt{1+l^2}}$. Donc si l'on pose:

(1) $\sin am\,(u,k) = x$, $\mathfrak{k} = \frac{l}{\sqrt{1+l^2}}$, $\sin am\,(k'u,\mathfrak{k}) = \xi$, $k'u = u$,

on aura:

(2) $\xi = \frac{k' \cdot x}{\sqrt{1-k^2x^2}}$, $u = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} \cdot \sqrt{1-\mathfrak{k}^2\xi^2}}$, $u = \frac{u}{k'}$.

Exemple: Soit $k^2 = -1$, $x = 1$, donc:

$$u = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

On a alors: $l^2 = -k^2 = 1$, $k' = \sqrt{2}$, $\mathfrak{k} = \frac{l}{\sqrt{1+l^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathfrak{k}^2 = \frac{1}{2}$, $\xi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. Or on a en vertu de l'exemple 10 du **96**:

$$u = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}\xi^2}} = 1{,}854\,075,\ \text{Log } u = 0{,}268\,1273$$

Donc: $u = \frac{u}{k'} = \frac{u}{\sqrt{2}}$; $\text{Log } u = 0{,}268\,1273$

$\text{Log } \sqrt{2} = 0{,}150\,5150$

$\text{Log } u = 0{,}117\,6123$, $u = 1{,}311\,029$

110. Si le carré du module, k^2, ou si l'amplitude, φ, est une quantité imaginaire, on emploiera encore la transformation de Landen. Seulement alors au lieu de calculer φ_2 à l'aide de la formule: $\text{tang}\,(\varphi_2 - \varphi) = k' \cdot \text{tang}\,\varphi$, il faut calculer les quantités, ordinairement imaginaires, $x_2 = \sin\varphi_2$ et $\sqrt{1-x_2^2} = \cos\varphi_2$ à l'aide des formules (1) et (2) du **79**:

$$x_2 = \sin\varphi_2 = (1+k') \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\Delta\varphi},\quad \sqrt{1-x_2^2} = \cos\varphi_2 = \frac{1-(1+k') \cdot \sin^2\varphi}{\Delta\varphi}.$$

La transformation de Landen sera donc alors exprimée par les équations:

$$(1)\quad \begin{cases} u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{1}{1+k'} \cdot \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-k_2^2x^2}} = \frac{u_2}{1+k'}, \\ \text{où: } k_2 = \frac{1-k'}{1+k'},\ x_2 = (1+k') \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\Delta\varphi} = (1+k') \cdot \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}, \\ \sqrt{1-x_2^2} = \frac{1-(1+k') \cdot \sin^2\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1-(1+k')x^2}{\sqrt{1-k^2x^2}}. \end{cases}$$

Ou bien on fera usage de la transformation du **82**. Si l'on y pose $x_4 = \sin\chi_4$, on aura alors en remarquant que:

$$\frac{1-\Delta\varphi}{1+\Delta\varphi} = \frac{(1-\Delta\varphi)^2}{k^2\sin^2\varphi},\quad \frac{\Delta\varphi - k'}{\Delta\varphi + k'} = \frac{(\Delta\varphi - k')^2}{k^2\cos^2\varphi},$$

$$(2)\quad \begin{cases} u = \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \frac{2}{(1+\sqrt{k'})^2}\int_0^{x_4} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k_4^2x^2}} = \frac{2u_4}{(1+\sqrt{k'})^2}, \\ \text{où: } k_4 = \left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2,\ x_4 = \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}.\frac{1-\Delta\varphi}{k\sin\varphi}.\frac{\Delta\varphi-k'}{k\cos\varphi} = \\ = \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}.\frac{1-\sqrt{1-k^2x^2}}{kx}.\frac{\sqrt{1-k^2x^2}-k'}{k\sqrt{1-x^2}}, \\ \sqrt{1-x_4^2} = \frac{\sqrt{2(1+k')}}{1-\sqrt{k'}}.\frac{\Delta\varphi-\sqrt{k'}}{\sqrt{1+\Delta\varphi}.\sqrt{\Delta\varphi+k'}} = \\ = \frac{\sqrt{2(1+k')}}{1-\sqrt{k'}}.\frac{\sqrt{1-k^2x^2}-\sqrt{k'}}{\sqrt{1+\sqrt{1-k^2x^2}}.\sqrt{\sqrt{1-k^2x^2}+k'}}. \end{cases}$$

Quand on aura par une ou plusieurs de ces transformations réduit le module à une valeur k_n assez petite pour qu'on puisse négliger sa quatrième puissance, on trouve l'intégrale correspondante u_n à l'aide de la formule (4) du **106**:

$$(3)\quad u_n = \int_0^{x_n} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k_n^2x^2}} = \chi_n + \tfrac{1}{4}k_n^2(\chi_n - x_n\sqrt{1-x_n^2}), \text{ où } x_n = \sin\chi_n.$$

La valeur de x_n sera ordinairement imaginaire ou plus grande que l'unité. On trouvera alors la valeur correspondante de χ_n par les formules:

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\chi_n + i.\sin\chi_n = \sqrt{1-x_n^2} + ix_n = r(\cos\psi + i.\sin\psi), \text{ ou } e^{i\chi_n} = r.e^{i\psi}; \\ \chi_n = \psi - i.\dfrac{\text{Log } r}{\text{Log } e}. \end{cases}$$

Exemple 1. Soit $k = \frac{1}{2}$, $x = 2$. On a alors $x = \frac{1}{k}$, et en vertu de la formule (1) du **16**, on aura alors:

$$u = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = K \pm i\,K',$$

où le signe du second terme sera + ou − suivant que le radical $\sqrt{1-x^2}$ finisse par $-\frac{ik'}{k}$, ou par $+\frac{ik'}{k}$. Or on a trouvé dans l'exemple 9 du **96** que pour $k = \frac{1}{2}$ on a: $K = 1{,}685\,750$, $K' = 2{,}156\,155$. Donc on aura:

$$u = 1{,}685\,750 \pm i\,.\,2{,}156\,515$$

où le signe sera +, si $\sqrt{1-x^2}$ finit pour $x = 2$ par la valeur $-i\sqrt{3}$, mais −, si $\sqrt{1-x^2}$ finit par la valeur $+i\sqrt{3}$.

Nous chercherons maintenant la valeur de l'intégrale u à l'aide des formules précédentes sans faire attention à la coincidence $x = \frac{1}{k}$, qui sera pour nous seulement un moyen de contrôle.

Les formules (2) donnent alors:

$$k' = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad k_4 = \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}\right)^2,\quad \sqrt{2} = 1.414\,213\,562,\quad \sqrt[4]{3} = 1{,}316\,074\,013,$$

$$\sqrt{2}-\sqrt[4]{3} = 0{,}098\,139\,549,\quad \text{Log}\,(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}) = 0{,}991\,8441 - 2$$

$$\sqrt{2}+\sqrt[4]{3} = 2{,}730\,287\,575,\quad \text{Log}\,(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}) = 0{,}436\,2084$$

$$\text{Log}\sqrt{k_4} = 0{,}555\,6357 - 2$$

$$\text{Log}\, k_4 = 0{,}111\,2714 - 3,\quad k_4 = 0{,}001\,292\,0265$$

$$x_4 = \frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\cdot\frac{-k'}{k\sqrt{-3}} = \pm\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\cdot\frac{k'}{i\,.\,k\sqrt{3}} = \mp i.\frac{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}},$$

où l'on doit choisir le signe supérieur, si $\sqrt{1-x^2}$ finit pour $x = 2$ par la valeur: $-i\sqrt{3}$, le signe inférieur, si $\sqrt{1-x^2}$ finit par la valeur $+i\sqrt{3}$.

$$\text{Log}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}}\right) = 1{,}444\,3643,\quad x_4 = \mp i\,.\,27{,}820\,46$$

$$\sqrt{1-x_4^2} = -\frac{\sqrt{2(1+k')}}{1-\sqrt{k'}} = -\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}};\quad 4+2\sqrt{3} = 7{,}464\,1016$$

$$\text{Log}\,(4+2\sqrt{3}) = 0{,}872\,9775$$

$$\text{Log}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 0{,}436\,4888$$

$$\text{Log}\,(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}) = 0{,}991\,8441 - 2$$

$$\text{Log}\sqrt{1-x_4^2} = 1{,}444\,6447_n,\quad \sqrt{1-x_4^2} = -27{,}838\,43$$

$$\sqrt{1-x_4^2} + i\,x_4 = -27{,}838\,43 \pm 27{,}820\,46 = r(\cos\psi + i\,.\,\sin\psi).$$

$$r = \frac{1}{55{,}65889},\ \text{ou}\ r = 55{,}658\,89,\quad \psi = \pi = 3{,}141\,5927$$

$$\text{Log}\, r = \mp 1{,}745\,5345,\quad \text{Log}\,(\mp\text{Log}\, r) = 0{,}241\,9285$$

$$\text{Log Log}\, e = 0{,}637\,7843 - 1$$

$$\text{Log}\left(\frac{\mp\text{Log}\, r}{\text{Log}\, e}\right) = 0{,}604\,1442,\quad \frac{\text{Log}\, r}{\text{Log}\, e} = \mp 4{,}019\,243$$

$$\chi_4 = \psi - i\,.\,\frac{\text{Log}\, r}{\text{Log}\, e} = 3{,}141\,5927 \pm i\,.\,4{,}019\,243$$

$$u_4 = \chi_4 + \tfrac{1}{4}k_4^2(\chi_4 - x_4\sqrt{1-x_4^2});\quad x_4 = \mp i.\,27{,}82;\quad \sqrt{1-x_4^2} = -27{,}84$$

$$\text{Log}\, k_4 = 0{,}1113 - 3 \qquad x_4\sqrt{1-x_4^2} = \pm i\,.\,774{,}5$$

$$\text{Log}\, k_4^2 = 0{,}2226 - 6 \qquad \chi_4 = 3{,}142 \pm i\,.\ 4{,}0$$

$$\text{Log}\, 4 = 0{,}6021 \qquad \chi_4 - x_4\sqrt{1-x_4^2} = 3{,}142 \pm i\,.\,770{,}5$$

$$\text{Log}\,\frac{k_4^2}{4} = 0{,}6205 - 7;\qquad \tfrac{1}{4}k_4^2 = 0{,}000\,000\,4173$$

$$\tfrac{1}{4}k_4^2(\chi_4 - x_4\sqrt{1-x_4^2}) = 0{,}000\,0013 \mp i\,.\,0{,}000\,322$$

$$\chi_4 = 3{,}141\,5927 \pm i\,.\,4{,}019\,243$$

$$u_4 = 3{,}141\,5940 \pm i\,.\,4{,}018\,921 = a \pm ib$$

$$u = \frac{2u_4}{(1+\sqrt{k'})^2} = \frac{4u_4}{(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^2};\quad \text{Log}\, a = 0{,}497\,1501,\quad \text{Log}\, b = 0{,}604\,1095$$

$$\text{Log}\, 4 = 0{,}602\,0600 \qquad = 0{,}602\,0600$$

$$\text{Log}\, 4a = 1{,}099\,2101,\quad \text{Log}\, 4b = 1{,}206\,1695$$

$$\text{Log}\,(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 0{,}872\,4168 \qquad = 0{,}872\,4168$$

$$0{,}226\,7933 \qquad 0{,}333\,7527$$

$$u = 1{,}685\,750 \pm i \,.\, 2{,}156\,516,$$

Exemple 2. Soit $k^2 = \frac{1+\sqrt{-1}}{2}$, $\varphi = 30^0$, donc: $x = \sin\varphi = \frac{1}{2}$.

On a alors en vertu de l'exemple du **99**:

$k_4 = r(\cos\alpha + i \,.\, \sin\alpha)$, où $\log r = 0{,}063\,5123 - 2$, $\alpha = 132^0\,3'\,10'',64$

$\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2x^2}$; $k^2x^2 = \frac{1+i}{2} \,.\, \frac{1}{4} = \frac{i+i}{8}$, $1-k^2x^2 = \frac{7-i}{8} = \rho \,.\, (\cos\beta - i \,.\, \sin\beta)$,

où $\rho = \frac{\sqrt{50}}{8}$, $\operatorname{tang}\beta = \frac{1}{7}$; $\operatorname{Log}\sqrt{\rho} = 0{,}973\,1975 - 1 \qquad = 0{,}973\,1975 - 1$

$\frac{1}{4}\operatorname{Log} 50 = 0{,}424\,7425$; $\operatorname{Log}\cos\frac{\beta}{2} = 0{,}998\,9061 - 1$; $\operatorname{Log}\sin\frac{\beta}{2} = 0{,}850\,5790 - 2$

$\frac{1}{2}\operatorname{Log} 8 = 0{,}451\,5450$

$\operatorname{Log}\sqrt{\rho} = 0{,}973\,1975 - 1 \qquad 0{,}972\,1036 - 1 \qquad 0{,}823\,7765 - 2$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\beta = 0{,}154\,9020 - 1$; $\Delta\varphi = 0{,}937\,7857 - i \,.\, 0.066\,646\,37$

$\beta = 8^0\,7'\,48'',37$; $\frac{\beta}{2} = 4^0\,3'\,54'',185$

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{k_4}} \cdot \frac{1-\Delta\varphi}{k \,.\, \sin\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi - k'}{k \,.\, \cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{k_4}} \cdot \frac{(1-\Delta\varphi)(\Delta\varphi - k')}{k^2 \sin 2\varphi}.$$

$1 - \Delta\varphi = 0{,}062\,2143 + i \,.\, 0{,}066\,646\,37 = a + ib = \sigma(\cos\gamma + i\sin\gamma)$,

où: $\sigma^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{tang}\gamma = \frac{b}{a}$;

$\operatorname{Log} a = 0{,}793\,8902 - 2$, $\operatorname{Log} a^2 = 0{,}587\,7804 - 3$, $a^2 = 0{,}003\,870\,619$

$\operatorname{Log} b = 0{,}823\,7765 - 2$, $\operatorname{Log} b^2 = 0{,}647\,5530 - 3$, $b^2 = 0{,}004\,441\,739$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\gamma = 0{,}029\,8863$ $\qquad \sigma^2 = 0{,}008\,312\,358$

$\gamma = 46^0\,58'\,11'',54$ $\qquad \operatorname{Log}\sigma^2 = 0{,}919\,7242 - 3$

$\operatorname{Log}\sigma = 0{,}959\,8621 - 2$

$k'^2 = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} - i \,.\, \sin\frac{\pi}{4})$; $k' = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(\cos\frac{\pi}{8} - i \,.\, \sin\frac{\pi}{8})$.

$\operatorname{Log}\frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0{,}924\,7425 - 1, \qquad = 0{,}924\,7425 - 1$

$\operatorname{Log}\cos\frac{\pi}{8} = 0.965\,6153 - 1$, $\operatorname{Log}\sin\frac{\pi}{8} = 0{,}582\,8397 - 1.$

$0{,}890\,3578 - 1 \qquad 0{,}507\,5822 - 1$

$k' = 0{,}776\,8870 - i \,.\, 0{,}321\,7972$

$\Delta\varphi = 0{,}937\,7857 - i \,.\, 0{,}066\,6464$

$\Delta\varphi - k' = 0{,}160\,8987 + i \,.\, 0{,}255\,1508 = a' + ib' = \sigma'(\cos\gamma' + i\sin\gamma')$

où: $\sigma'^2 = a'^2 + b'^2$, $\operatorname{tang}\gamma' = \frac{b'}{a'}$.

$\operatorname{Log} a' = 0{,}206\,5525 - 1$, $\operatorname{Log} a'^2 = 0{,}413\,1050 - 2$, $a'^2 = 0{,}025\,888\,39$

$\operatorname{Log} b' = 0{,}406\,7970 - 1$, $\operatorname{Log} b'^2 = 0{,}813\,5940 - 2$, $b'^2 = 0.065\,101\,95$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\gamma' = 0{,}200\,2445$ $\qquad \sigma'^2 = 0{,}090\,990\,34$

$\gamma' = 57^0\,45'\,51'',76$ $\qquad \operatorname{Log}\sigma'^2 = 0{,}958\,9953 - 2$

$\operatorname{Log}\sigma' = 0{,}479\,4977 - 1$

$k^2=\frac{1+i}{2}$, $\sin 2\varphi=\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k^2.\sin 2\varphi=\frac{(1+i)\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$.

$x_4=\frac{\sigma\sigma'\sqrt{32}}{\sqrt{3r}}(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}-\gamma-\gamma')-i.\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}-\gamma-\gamma'))$.

$\frac{\pi}{4}=45^0$ $\quad$ $\operatorname{Log}\sqrt{32}=0{,}752\,5750$ $\quad$ $\operatorname{Log}\sqrt{r}=0{,}031\,7561-1$

$\frac{\alpha}{2}=66^0\,1'\,35'',32$ $\quad$ $\operatorname{Log}\sigma=0{,}959\,8621-2$ $\quad$ $\operatorname{Log}\sqrt{3}=0{,}238\,5607$

$111^0\,1'\,35'',32$ $\quad$ $\operatorname{Log}\sigma'=0{,}479\,4977-1$, $\quad$ $\operatorname{Log}\sqrt{3r}=0{,}270\,3168-1$

$\gamma+\gamma'=104^0\,44'\,3'',30$ $\quad$ $0{,}191\,9348-1$

$\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}-\gamma-\gamma'=6^0\,17'\,32'',02$ $\quad$ $\operatorname{Log}(\sqrt{3r})=0{,}270\,3168-1$

$\operatorname{Log}\frac{\sigma\sigma'\sqrt{32}}{\sqrt{3r}}=0{,}921\,6180-1$

$\operatorname{Log}\left(\frac{\sigma\sigma'\sqrt{32}}{\sqrt{3r}}\right)=0{,}921\,6180-1$ $\qquad$ $=0{,}921\,6180-1$

$\operatorname{Log}\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}-\gamma-\gamma')=0{,}997\,3758-1$; $\quad$ $\operatorname{Log}\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}-\gamma-\gamma')=0{,}039\,8085-1$.

$0{,}918\,9939-1$ $\qquad$ $0{,}961\,4265-2$

$x_4=\sin\chi_4=0{,}829\,8390-i.\,0{,}091\,5011$

$\cos\chi_4=\sqrt{1-x_4^2}=\frac{\sqrt{2(1+k')}}{1-\sqrt{k'}}.\frac{\Delta\varphi-\sqrt{k'}}{\sqrt{1+\Delta\varphi}.\sqrt{\Delta\varphi+k'}}$; $\quad\sqrt{k'}=\frac{1}{\sqrt[8]{2}}(\cos\frac{\pi}{16}-i.\sin\frac{\pi}{16})$.

$\operatorname{Log}\frac{1}{\sqrt[8]{2}}=0{,}962\,3712-1$ $\qquad$ $=0{,}962\,3712-1$

$\operatorname{Log}\cos\frac{\pi}{16}=0{,}991\,5739-1$, $\quad$ $\operatorname{Log}\sin\frac{\pi}{16}=0{,}290\,2357-1$

$0{,}953\,9451-1$ $\qquad$ $0{,}252\,6069-1$

$\sqrt{k'}=0{,}899\,3839-i.\,0{,}178\,8986$

$\Delta\varphi=0{,}937\,7857-i.\,0{,}066\,6464$

$\Delta\varphi-\sqrt{k'}=0{,}038\,4018+i.\,0{,}112\,2522=a+ib=\tau(\cos\delta+i\sin\delta)$

où $\tau^2=a^2+b^2$, $\operatorname{tang}\delta=\frac{b}{a}$,

$\operatorname{Log}a=0{,}584\,3515-2$, $\quad\operatorname{Log}a^2=0{,}168\,7030-3$, $\quad a^2=0{,}001\,474\,698$

$\operatorname{Log}b=0{,}050\,1948-1$, $\quad\operatorname{Log}b^2=0{,}100\,3896-2$, $\quad b^2=0{,}012\,600\,554$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\delta=0{,}465\,8433$ $\qquad$ $\tau^2=0{,}014\,075\,252$

$\delta=71^0\,6'\,50'',52$ $\qquad$ $\operatorname{Log}\tau^2=0{,}148\,4562-2$

$\operatorname{Log}\tau=0{,}074\,2281-1$

$1+\Delta\varphi=1{,}937\,7857-i.\,0{,}066\,64637=a'-ib'=\tau'(\cos\delta'-i\sin\delta')$

où: $\tau'^2=a'^2+b'^2$, $\operatorname{tang}\delta'=\frac{b'}{a'}$, $\sqrt{1+\Delta\varphi}=\sqrt{\tau'}(\cos\frac{\delta'}{2}-i.\sin\frac{\delta'}{2})$.

$\operatorname{Log}a'=0{,}287\,3058$, $\quad\operatorname{Log}a'^2=0{,}574\,6116$, $\quad a'^2=3{,}755\,015$

$\operatorname{Log}b'=0{,}823\,7765-2$, $\quad\operatorname{Log}b'^2=0{,}647\,5530-3$, $\quad b'^2=0{,}004\,442$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\delta'=0{,}536\,4707-2$ $\qquad$ $\tau'^2=3{,}759\,457$

$\delta'=1^0\,58'\,11'',28$ $\qquad$ $\operatorname{Log}\tau'^2=0{,}575\,1251$

$\frac{\delta'}{2} = 0^0 59' 5'',64$ $\quad$ $\text{Log}\sqrt{\tau'} = 0,143\,7813$

$\Delta\varphi = 0,937\,7857 - i\,.\,0,066\,6464$

$k' = 0,776\,8870 - i\,.\,0,321\,7972$

$\Delta\varphi + k' = 1,714\,6727 - i\,.\,0,388\,4436 = a'' - ib'' = \tau''(\cos\delta'' - i\sin\delta'')$

où $\tau''^2 = a''^2 + b''^2$, $\text{tang}\,\delta'' = \frac{b''}{a''}$, $\sqrt{\Delta\varphi + k'} = \sqrt{\tau''}(\cos\frac{\delta''}{2} - i\,.\,\sin\frac{\delta''}{2})$.

$\text{Log}\,a'' = 0,234\,1812$, $\text{Log}\,a''^2 = 0,468\,3624$, $a''^2 = 2,940\,102$

$\text{Log}\,b'' = 0,589\,3279 - 1$, $\text{Log}\,b''^2 = 0,178\,6558 - 1$, $b''^2 = 0,150\,889$

$\text{Log tang}\,\delta'' = 0,355\,1467 - 1$, $\quad$ $\tau''^2 = 3,090\,991$

$\delta'' = 12^0 45' 51'',81$ $\quad$ $\text{Log}\,\tau''^2 = 0,490\,0977$

$\frac{\delta''}{2} = 6^0 22' 55'',905$ $\quad$ $\text{Log}\sqrt{\tau''} = 0,122\,5244$

$1 + k' = 1,776\,8870 - i\,.\,0,321\,7972$

$2(1 + k') = 3,553\,7740 - i\,.\,0,643\,5944 = c - id = s(\cos\varepsilon - i\,.\,\sin\varepsilon)$

où $s^2 = c^2 + d^2$, $\text{tang}\,\varepsilon = \frac{d}{c}$. $\sqrt{2(1+k')} = \sqrt{s}\,(\cos\frac{\varepsilon}{2} - i\,.\,\sin\frac{\varepsilon}{2})$.

$\text{Log}\,c = 0,550\,6898$, $\text{Log}\,c^2 = 1,101\,3796$, , $c^2 = 12,629\,308$

$\text{Log}\,d = 0,808\,6122 - 1$, $\text{Log}\,d^2 = 0,617\,2244 - 1$, $d^2 = 0,414\,214$

$\text{Log tang}\,\varepsilon = 0,257\,9224 - 1$, $\quad$ $s^2 = 13,043\,522$

$\varepsilon = 10^0 15' 54'',36$ $\quad$ $\text{Log}\,s^2 = 1,115\,3949$

$\frac{\varepsilon}{2} = 5^0\ 7' 57'',18$ $\quad$ $\text{Log}\sqrt{s} = 0,278\,8487$

$\sqrt{k'} = 0,899\,3839 - i\,.\,0,178\,8986.$

$1 - \sqrt{k'} = 0,100\,6161 + i\,.\,0,178\,8986 = c' + id' = s'(\cos\varepsilon' + i\,.\,\sin\varepsilon')$

où: $s'^2 = c'^2 + d'^2$, $\text{tang}\,\varepsilon' = \frac{d'}{c'}$.

$\text{Log}\,c' = 0,002\,6675 - 1$, $\text{Log}\,c'^2 = 0,005\,3350 - 2$, $c'^2 = 0,010\,123\,60$

$\text{Log}\,d' = 0,252\,6069 - 1$, $\text{Log}\,d'^2 = 0,505\,2138 - 2$, $d'^2 = 0,032\,004\,70$

$\text{Log tang}\,\varepsilon' = 0,249\,9394$ $\quad$ $s'^2 = 0,042\,128\,30$

$\varepsilon' = 60^0 38' 45'',06$ $\quad$ $\text{Log}\,s'^2 = 0,624\,5739 - 2$

$\text{Log}\,s' = 0,312\,2869 - 1$

$$\cos\chi_4 = \frac{\tau\sqrt{s}}{s'\sqrt{\tau'}.\sqrt{\tau''}}\left(\cos(\delta + \frac{\delta'}{2} + \frac{\delta''}{2} - \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon') + i.\sin(\delta + \frac{\delta'}{2} + \frac{\delta''}{2} - \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon')\right).$$

$\delta = 71^0\ 6' 50'',52$ $\quad$ $\text{Log}\,\tau = 0,074\,2281 - 1$, $\text{Log}\,s' = 0,312\,2869 - 1$

$\frac{\delta'}{2} = 0^0 59' 5'',64$ $\quad$ $\text{Log}\sqrt{s} = 0,278\,8487$ $\quad$ $\text{Log}\sqrt{\tau'} = 0,143\,7813$

$\frac{\delta''}{2} = 6^0 22' 55'',905$ $\quad$ $\text{Log}(\tau\sqrt{s}) = 0,353\,0768 - 1$ $\quad$ $\text{Log}\sqrt{\tau''} = 0,122\,5244$

$78^0 28' 52'',065$ $\quad$ $\text{L.}(s'\sqrt{\tau'}.\sqrt{\tau''}) = 0,578\,5926 - 1$ $\quad$ $= 0,578\,5926 - 1$

$\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon' = 65^0 46' 42'',24$ $\quad$ $\text{Lg}.\frac{\tau\sqrt{3}}{s'\sqrt{\tau'}.\sqrt{\tau''}} = 0,774\,4842 - 1$ $\quad$ $= 0,774\,4842 - 1$

$\lambda' = 12^0 42'\ 9'',825$, $\quad$ $\text{Log}\cos\lambda' = 0,989\,2380 - 1$; $\text{Log}\sin\lambda' = 0,342\,2108 - 1$

$0,763\,7222 - 1$ $\quad$ $0,116\,6950 - 1$

$$\cos\chi_4 = 0{,}580\,3931 + i\,.\,0{,}130\,8263$$
$$i\,.\,\sin\chi_4 = 0{,}091\,5011 + i\,.\,0{,}829\,8390$$
$$e^{i\chi_4} = 0{,}671\,8942 + i\,.\,0{,}960\,6653 = a + ib = r(\cos\psi + i\sin\psi),$$

où: $r^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{tang}\psi = \frac{b}{a}$,

$\operatorname{Log} a = 0{,}827\,3009 - 1$, $\operatorname{Log} a^2 = 0{,}654\,6018 - 1$ $\quad a^2 = 0{,}451\,4419$

$\operatorname{Log} b = 0{,}982\,5721 - 1$ $\operatorname{Log} b^2 = 0{,}965\,1442 - 1$ $\quad b^2 = 0{,}922\,8778$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\psi = 0{,}155\,2712$ $\quad r^2 = 1{,}374\,3197$

$\psi = 55^0\,1'\,51'',09$ $\quad \operatorname{Log} r^2 = 0{,}138\,0877$

$= 0{,}960\,4697$ $\quad \operatorname{Log} r = 0{,}069\,0439$

$$\chi_4 = \psi - i\,.\,\frac{\operatorname{Log} r}{\operatorname{Log} e},\quad \operatorname{Log}\operatorname{Log} r = 0{,}839\,1253 - 2$$
$$\operatorname{Log}\operatorname{Log} e = 0{,}637\,7843 - 1$$
$$0{,}201\,3410 - 1$$
$$\frac{\operatorname{Log} r}{\operatorname{Log} e} = 0{,}158\,9795$$
$$\chi_4 = 0{,}960\,4696 - i\,.\,0{,}158\,9795.$$

$u_4 = \chi_4 + \frac{1}{4}k_4^2(\chi_4 - \sin\chi_4\,.\,\cos\chi_4)$,

$\sin\chi_4 = R(\cos\lambda - i\,.\,\sin\lambda)$, $\operatorname{Log} R = 0{,}9216 - 1$, $\lambda = 6^0\,17'\,32'',02$

$\cos\chi_4 = R'(\cos\lambda' + i\,.\,\sin\lambda')$, $\operatorname{Log} R' = 0{,}7745 - 1$, $\lambda' = 12^0\,42'\,9'',825$

$0{,}6961 - 1 = \operatorname{Log}(R\,.\,R') = 0{,}6961 - 1$, $\lambda' - \lambda = 6^0\,24'\,37'',805$

$\operatorname{Log}\cos(\lambda' - \lambda) = 0{,}9973 - 1$. $\operatorname{Log}\sin(\lambda' - \lambda) = 0{,}0479 - 1$

$0{,}6934 - 1$ $\quad 0{,}7440 - 2.$

$$\sin\chi_4\,.\,\cos\chi_4 = 0{,}4936 + i\,.\,0{,}0555$$
$$\chi_4 = 0{,}9605 - i\,.\,0{,}1590$$
$$\chi_4 - \sin\chi_4\,.\,\cos\chi_4 = 0{,}4669 - i\,.\,0{,}2145 = a - ib = \rho(\cos\beta - i\sin\beta)$$

où $\rho^2 = a^2 + b^2$, $\operatorname{tang}\beta = \frac{b}{a}$,

$\operatorname{Log} a = 0{,}6692 - 1$, $\operatorname{Log} a^2 = 0{,}3384 - 1$, $a^2 = 0{,}2180$

$\operatorname{Log} b = 0{,}3314 - 1$, $\operatorname{Log} b^2 = 0{,}6628 - 2$ $\quad b^2 = 0{,}0460$

$\operatorname{Log}\operatorname{tang}\beta = 0{,}6622 - 1$ $\quad \rho^2 = 0{,}2640$

$\beta = 24^0\,40'\,30''$ $\quad \operatorname{Log}\rho^2 = 0{,}4216 - 1$

$\operatorname{Log}\rho = 0{,}7108 - 1$

$k_4 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, où $\log r = 0{,}0635 - 2$, $\alpha = 132^0\,3'\,10''$

$k_4^2(\chi_4 - \sin\chi_4\,.\,\cos\chi_4) = r^2\rho(\cos(2\alpha - \beta) + i\sin(2\alpha - \beta))$, $2\alpha = 264^0\,6'\,20''$

$\operatorname{Log} r^2 = 0{,}1270 - 4$ $\quad \beta = 24^0\,40'\,30''$

$\operatorname{Log}\rho = 0{,}7108 - 1$ $\quad 2\alpha - \beta = 239^0\,25'\,50''$

$\operatorname{Log} r^2\rho = 0{,}8378 - 5$ $\quad = 0{,}8378 - 5$

$\operatorname{Log}\cos(2\alpha - \beta) = 0{,}7064_n - 1$, $\quad \operatorname{Log}\sin(2\alpha - \beta) = 0{,}9350_n - 1$

$0{,}5442_n - 5$ $\quad 0{,}8728_n - 5$

$k_4^2(\chi_4 - \sin\chi_4\cos\chi_4) = -0{,}000\,0350 - i\,.\,0.000\,0593$

$\frac{1}{4}k_4^2(\chi_4 - \sin\chi_4\cos\chi_4) = -0{,}000\,0088 - i\,.\,0{,}000\,0148$

$\chi_4 = 0{,}960\,4697 - i\,.\,0.158\,9795$

$u_4 = 0{,}960\,4609 - i\,.\,0{,}158\,9943.$

$u = \frac{2u_4}{(1+\sqrt{k'})^2}$, $2u_4 = 1{,}920\,9218 - i\,.\,0{,}317\,9886 = a - ib = r(\cos\alpha - i.\sin\alpha)$,

où $r^2 = a^2 + b^2$, $\text{tang}\,\alpha = \frac{b}{a}$.

$\text{Log}\,a = 0{,}283\,5097$, $\text{Log}\,a^2 = 0{,}567\,0194$, $a^2 = 3.689\,9341$

$\text{Log}\,b = 0.502\,4116 - 1$, $\text{Log}\,b^2 = 0{,}004\,8232 - 1$, $b^2 = 0.101\,1167$

$\text{Log tang}\,\alpha = 0{,}218\,9019 - 1$ $r^2 = 3{,}791\,0508$

$\alpha = 9^0 23'58'',13$ $\text{Log}\,r^2 = 0.578\,7596$

$\text{Log}\,r = 0{,}289\,3798$

$1 + \sqrt{k'} = 1.899\,3839 - i\,.\,0{,}178\,8986 = a' - i\,.\,b' = r'(\cos\alpha' - i\,.\,\sin\alpha')$,

où $r'^2 = a'^2 + b'^2$, $\text{tang}\,\alpha' = \frac{b'}{a'}$, $(1+\sqrt{k'})^2 = r'^2(\cos 2\alpha' - i\,.\,\sin 2\alpha')$.

$\text{Log}\,a' = 0.278\,6127$, $\text{Log}\,a'^2 = 0{,}557\,2254$, $a'^2 = 3{,}607\,6583$

$\text{Log}\,b' = 0{,}252\,6069 - 1$, $\text{Log}\,b'^2 = 0.505\,2138 - 2$, $b'^2 = 0{,}032\,0047$

$\text{Log tang}\,\alpha' = 0{,}973\,9942 - 2$ $r'^2 = 3{,}639\,6630$

$\alpha' = 5^0 22'50'',46$. $2\alpha' = 10^0 45'40'',92$, $\text{Log}\,r'^2 = 0.561\,0612$

$u = \frac{r}{r'^2}(\cos(2\alpha' - \alpha) + i\,.\,\sin(2\alpha' - \alpha))$, $2\alpha' - \alpha = 1^0 21'42'',79$

$\text{Log}\,r = 0{,}289\,3798$

$\text{Log}\,r'^2 = 0{,}561\,0612$

$\text{Log}\left(\frac{r}{r'^2}\right) = 0{,}728\,3186 - 1$ $= 0{,}728\,3186 - 1$

$\text{Log}\cos(2\alpha' - \alpha) = 0{,}999\,8773 - 1$, $\text{Log}\sin(2\alpha' - \alpha) = 0\,375\,9773 - 2$

$0{,}728\,1959 - 1$ $0{,}104\,2959 - 2$

$u = 0{,}534\,8056 + i\,.\,0{,}012\,71440.$

111. On peut aussi trouver la valeur de l'intégrale elliptique: $u = u + iv$ à l'aide des formules du **105**, qu'on peut résoudre par rapport à $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$, et desquelles on peut trouver les arguments u et v séparément.

Or les formules du **105** coincident avec les formules des paragraphes **5** et **6**, chapitre premier, si l'on pose:

$x_1 = \sin\text{am}(u,k) = \mathfrak{x}$, $y_1 = \cos\text{am}(u,k) = \mathfrak{y}$, $z_1 = \Delta\,\text{am}(u,k) = \mathfrak{z}$,

$$x_2 = \sin\text{am}(iv.k) = i\,.\,\frac{\sin\text{am}(v,k')}{\cos\text{am}(v,k')} = \frac{i\mathfrak{x}'}{\mathfrak{y}'},$$

$$y_2 = \cos\text{am}(iv,k) = \frac{1}{\cos\text{am}(v,k')} = \frac{1}{\mathfrak{y}'},$$

$$z_2 = \Delta\,\text{am}(iv,k) = \frac{\Delta\,\text{am}(v,k')}{\cos\text{am}(v,k')} = \frac{\mathfrak{z}'}{\mathfrak{y}'}.$$

desquelles on tire:

$$\xi' = -\frac{ix_2}{y_2},\quad \eta' = \frac{1}{y_2},\quad \zeta' = \frac{z_2}{y_2}.$$

Au lieu de résoudre les équations du **105** par rapport à $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$, on peut donc chercher la valeur de ces dernières quantités des formules du **5** et **6**, ou, ce qui vaut le même, des formules du **10**, chapitre premier.

Posons les fonctions elliptiques imaginaires $\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta, \zeta'$ sous les formes:

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = \sin am\,(u + i\,.\,v) = r\,(\cos\psi + i\,.\,\sin\psi), \\ \xi' = \sin am\,(u - i\,.\,v) = r\,(\cos\psi - i\,.\,\sin\psi), \\ \eta = \cos am\,(u + i\,.\,v) = r'(\cos\psi' + i\,.\,\sin\psi'), \\ \eta' = \cos am\,(u - i\,.\,v) = r'(\cos\psi' - i\,.\,\sin\psi'), \\ \zeta = \Delta am\,(u + i\,.\,v) = r''(\cos\psi'' + i\,.\,\sin\psi''), \\ \zeta' = \Delta am\,(u - i\,.\,v) = r''(\cos\psi'' - i\,.\,\sin\psi''). \end{cases}$$

Des valeurs nombreuses de $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, et de là de $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$, qu'on peut tirer des formules du **10**, nous ferons ici remarquer les suivantes. Nous ajoutons les numéros des formules du **10**, dont elles sont tirées.

$$(2)\quad \xi^2 = x_1x_2\,.\,\frac{x_1}{x_2} = (34)\,.\,(37) = -\frac{\eta - \eta'}{\zeta + \zeta'}\,.\,\frac{\xi\zeta' + \xi'\zeta}{\xi\eta' - \xi'\eta} = \frac{\sin\psi\,.\cos(\psi - \psi'')}{\cos\psi''\,.\sin(\psi' - \psi)}.$$

$$(3)\quad \eta^2 = y_1y_2\,.\,\frac{y_1}{y_2} = (35)\,.\,(38) = \frac{\eta'\zeta + \eta\zeta'}{\zeta + \zeta'}\,.\,\frac{\xi - \xi'}{\xi\eta' - \xi'\eta} = \frac{\cos(\psi'' - \psi')\,.\,\sin\psi}{\cos\psi''\,.\sin(\psi - \psi')}.$$

$$(4)\quad \zeta^2 = z_1z_2\,.\,\frac{z_1}{z_2} = (36)\,.\,(39) = \frac{\eta'\zeta + \eta\zeta'}{\eta + \eta'}\,.\,\frac{\xi - \xi'}{\xi\zeta' - \xi'\zeta} = \frac{\cos(\psi'' - \psi')\,.\,\sin\psi}{\cos\psi'\,.\,\sin(\psi - \psi'')}.$$

$$(5)\quad \xi'^2 = -\frac{x_2^2}{y_2^2} = -\frac{x_1x_2}{y_1y_2}:\frac{x_1y_2}{x_2y_1} = -\frac{(60)}{(63)} = \frac{\eta - \eta'}{\eta'\zeta + \eta\zeta'}:\frac{\xi + \xi'}{\xi\zeta' - \xi'\zeta} = \frac{\sin\psi'\,.\,\sin(\psi'' - \psi)}{\cos(\psi'' - \psi')\,.\cos\psi}.$$

$$(6)\quad \eta'^2 = \frac{1}{y_2^2} = \frac{y_1}{y_2}:y_1y_2 = \frac{(38)}{(35)} = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\xi + \xi'}:\frac{\eta'\zeta + \eta\zeta'}{\zeta + \zeta'} = \frac{\cos(\psi' - \psi)\,.\cos\psi''}{\cos\psi\,.\cos(\psi'' - \psi')}.$$

$$(7)\quad \zeta'^2 = \frac{z_2^2}{y_2^2} = \frac{y_1z_2}{z_1y_2}:\frac{y_1y_2}{z_1z_2} = \frac{(61)}{(58)} = \frac{\xi\eta' + \xi'\eta}{\xi\zeta' + \xi'\zeta}:\frac{\eta + \eta'}{\zeta + \zeta'} = \frac{\cos(\psi' - \psi)\,.\cos\psi''}{\cos(\psi'' - \psi)\,.\cos\psi'}.$$

Des formules (7), (8) et (9) du **10** on peut encore déduire les formules suivantes, qui auront dû avoir leur place déja dans le paragraphe **10** du premier chapitre.

Si l'on pose pour abréger le dénominateur commun des formules (7), (8) et (9) du **10**: $1 - k^2x_1^2x_2^2 = N$, et si l'on remarque qu'on peut mettre N sous les formes suivantes:

$$N = 1 - k^2x_1^2x_2^2 = z_1^2 + k^2x_1^2y_2^2 = z_2^2 + k^2x_2^2y_1^2 =$$
$$= y_2^2 + x_2^2z_1^2 = y_1^2 + x_1^2z_2^2 = \frac{1}{k'^2}\,(z_1^2z_2^2 - k^2y_1^2y_2^2),$$

les formules (7), (8) et (9) du **10** deviendront:

$$N\xi\xi' = x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2 = \frac{1}{k^2}(z_2^2 - z_1^2) = \frac{1}{k'^2}(y_2^2z_1^2 - y_1^2z_2^2) = x_1^2z_2^2 - x_2^2z_1^2 = x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2,$$

$$N\eta\eta' = \frac{1}{k^2}(z_1^2z_2^2 - k'^2) = y_1^2 - x_2^2z_1^2 = y_2^2 - x_1^2z_2^2,$$

$$N\zeta\zeta' = k'^2 + k^2y_1^2y_2^2 = z_1^2 - k^2x_2^2y_1^2 = z_2^2 - k^2x_1^2y_2^2.$$

et on trouvera de là:

$$N(\eta\eta' + \zeta\zeta') = y_1^2 z_2^2 + z_1^2 y_2^2 = k'^2 N\xi\xi' + 2y_1^2 z_2^2 = 2y_2^2 z_1^2 - k'^2 N\xi\xi',$$

$$N(-\eta\eta' + \zeta\zeta') = k'^2(x_1^2 + x_2^2) = k'^2 N\xi\xi' + 2k'^2 x_2^2 = 2k'^2 x_1^2 - k'^2 N\xi\xi',$$

$$N(k^2\eta\eta' + \zeta\zeta') = z_1^2 z_2^2 + k^2 y_1^2 y_2^2 = k'^2 N + 2k^2 y_1^2 y_2^2 = 2z_1^2 z_2^2 - k'^2 N,$$

$$N(-k^2\eta\eta' + \zeta\zeta') = -z_1^2 z_2^2 + 2k'^2 + k^2 y_1^2 y_2^2 = k'^2 N + 2k'^2 k^2 x_1^2 x_2^2 = 2k'^2 - k'^2 N$$

$$N(k^2\xi\xi' + \zeta\zeta') = z_2^2 - k^2 x_2^2 y_1^2 = N - 2k^2 x_2^2 y_1^2 = 2z_2^2 - N,$$

$$N(k^2\xi\xi' - \zeta\zeta') = k^2 x_1^2 y_2^2 - z_1^2 = N - 2z_1^2 = 2k^2 x_1^2 y_2^2 - N,$$

$$N(\xi\xi' + \eta\eta') = y_2^2 - x_2^2 z_1^2 = N - 2x_2^2 z_1^2 = 2y_2^2 - N,$$

$$N(\xi\xi' - \eta\eta') = x_1^2 z_2^2 - y_1^2 = N - 2y_1^2 = 2x_1^2 z_2^2 - N.$$

De là on tire enfin les 16 formules suivantes:

$$(8) \quad k'^2 - k^2\eta\eta' + \zeta\zeta' = \frac{2k'^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(9) \quad k'^2\xi\xi' - \eta\eta' + \zeta\zeta' = \frac{2k'^2 x_1^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(10) \quad 1 - \xi\xi' + \eta\eta' = \frac{2y_1^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(11) \quad 1 - k^2\xi\xi' + \zeta\zeta' = \frac{2z_1^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(12) \quad -k'^2\xi\xi' - \eta\eta' + \zeta\zeta' = \frac{2k'^2 x_2^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(13) \quad 1 + \xi\xi' + \eta\eta' = \frac{2y_2^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(14) \quad 1 + k^2\xi\xi' + \zeta\zeta' = \frac{2z_2^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(15) \quad -k'^2 - k^2\eta\eta' + \zeta\zeta' = \frac{2k^2 k'^2 x_1^2 x_2^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(16) \quad -k'^2 + k^2\eta\eta' + \zeta\zeta' = \frac{2k^2 y_1^2 y_2^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(17) \quad k'^2 + k^2\eta\eta' + \zeta\zeta' = \frac{2z_1^2 z_2^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(18) \quad -k'^2\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \frac{2y_1^2 z_2^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(19) \quad k'^2\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \frac{2y_2^2 z_1^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(20) \quad 1 + \xi\xi' - \eta\eta' = \frac{2x_1^2 z_2^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(21) \quad 1 - \xi\xi' - \eta\eta' = \frac{2x_2^2 z_1^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

$$(22) \quad 1 + k^2\xi\xi' - \zeta\zeta' = \frac{2k^2 x_1^2 y_2^2}{1 - k^2 x_1^2 x_2^2},$$

(23) $\quad 1 - k^2\xi\xi' - \zeta\zeta' = \dfrac{2k^2x_2^2y_1^2}{1-k^2x_1^2x_2^2}.$

Or des formules précédentes (1) on tire:

$$\xi\xi' = r^2,\ \eta\eta' = r'^2,\ \zeta\zeta' = r''^2;$$

donc on aura:

(24) $\xi^2 = x_1^2 = \dfrac{(9)}{(8)} = \dfrac{k'^2r^2 - r'^2 + r''^2}{k'^2 - k^2r'^2 + r''^2} = \dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{(15)}{(12)} = \dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{k'^2 + k^2r'^2 - r''^2}{k'^2r^2 + r'^2 - r''^2} =$

$$= \dfrac{(20)}{(14)} = \dfrac{1 + r^2 - r'^2}{1 + k^2r^2 + r''^2} = \dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{(22)}{(13)} = \dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{1 + k^2r^2 - r''^2}{1 + r^2 + r'^2}.$$

(25) $\eta^2 = y_1^2 = k'^2\cdot\dfrac{(10)}{(8)} = k'^2\cdot\dfrac{1 - r^2 + r'^2}{k'^2 - k^2r'^2 + r''^2} = \dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{(16)}{(13)} = \dfrac{1}{k^2}\cdot\dfrac{-k'^2 + k^2r'^2 + r''^2}{1 + r^2 + r'^2} =$

$$= \dfrac{(18)}{(14)} = \dfrac{-k'^2r^2 + r'^2 + r''^2}{1 + k^2r^2 + r''^2} = \dfrac{k'^2}{k^2}\cdot\dfrac{(23)}{(12)} = \dfrac{k'^2}{k^2}\cdot\dfrac{1 - k^2r^2 - r''^2}{-k'^2r^2 - r'^2 + r''^2}.$$

(26) $\zeta^2 = z_1^2 = k'^2\cdot\dfrac{(11)}{(8)} = k'^2\cdot\dfrac{1 - k^2r^2 + r''^2}{k'^2 - k^2r'^2 + r''^2} = \dfrac{(17)}{(14)} = \dfrac{k'^2 + k^2r'^2 + r''^2}{1 + k^2r^2 + r''^2} =$

$$= \dfrac{(19)}{(13)} = \dfrac{k'^2r^2 + r'^2 + r''^2}{1 + r^2 + r'^2} = k'^2\dfrac{(21)}{(12)} = k'^2\cdot\dfrac{-1 + r^2 + r'^2}{k'^2r^2 + r'^2 - r''^2}.$$

(27) $\xi'^2 = -\dfrac{x_2^2}{y_2^2} = -\dfrac{1}{k'^2}\cdot\dfrac{(12)}{(13)} = \dfrac{1}{k'^2}\cdot\dfrac{k'^2r^2 + r'^2 - r''^2}{1 + r^2 + r'^2} = -\dfrac{1}{k'^2}\cdot\dfrac{(15)}{(22)} = \dfrac{1}{k'^2}\cdot\dfrac{k'^2 + k^2r'^2 - r''^2}{1 + k^2r^2 - r''^2}$

$$= -\dfrac{(21)}{(19)} = \dfrac{-1 + r^2 + r'^2}{k'^2r^2 + r'^2 + r''^2} = -\dfrac{(23)}{(16)} = \dfrac{-1 + k^2r^2 + r''^2}{-k'^2 + k^2r'^2 + r''^2}.$$

(28) $\eta'^2 = \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{k'^2}\cdot\dfrac{(8)}{(13)} = \dfrac{1}{k'^2}\cdot\dfrac{k'^2 - k^2r'^2 + r''^2}{1 + r^2 + r'^2} = k^2\cdot\dfrac{(10)}{(16)} = k^2\cdot\dfrac{1 - r^2 + r'^2}{-k'^2 + k^2r'^2 + r''^2}$

$$= \dfrac{(11)}{(19)} = \dfrac{1 - k^2r^2 + r''^2}{k'^2r^2 + r'^2 + r''^2} = \dfrac{k^2}{k'^2}\cdot\dfrac{(9)}{(22)} = \dfrac{k^2}{k'^2}\cdot\dfrac{k'^2r^2 - r'^2 + r''^2}{1 + k^2r^2 - r''^2}.$$

(29) $\zeta'^2 = \dfrac{z_2^2}{y_2^2} = \dfrac{(14)}{(13)} = \dfrac{1 + k^2r^2 + r''^2}{1 + r^2 + r'^2} = \dfrac{(17)}{(19)} = \dfrac{k'^2 + k^2r'^2 + r''^2}{k'^2r^2 + r'^2 + r''^2} =$

$$= k^2\cdot\dfrac{(18)}{(16)} = k^2\cdot\dfrac{-k'^2r^2 + r'^2 + r''^2}{-k'^2 + k^2r'^2 + r''^2} = k^2\cdot\dfrac{(20)}{(22)} = k^2\cdot\dfrac{1 + r^2 - r'^2}{1 + k^2r^2 - r''^2}.$$

Si $\xi = \sin am\,(u + i.v) = r(\cos\psi + i.\sin\psi)$, donc r et ψ sont données, on trouvera les valeurs de ψ', ψ'', r', r'' à l'aide des équations:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1,\ k^2\xi^2 + \zeta^2 = 1,\ k^2\eta^2 - \zeta^2 = -k'^2$$

desquelles on tire:

(30) $\begin{cases} r^2.\cos 2\psi + r'^2.\cos 2\psi' = 1, & r^2.\sin 2\psi + r'^2.\sin 2\psi' = 0, \\ k^2r^2.\cos 2\psi + r''^2.\cos 2\psi'' = 1, & k^2r^2.\sin 2\psi + r''^2.\sin 2\psi'' = 0, \\ k^2r'^2.\cos 2\psi' - r''^2.\cos 2\psi'' = -k'^2, & k^2r'^2.\sin 2\psi' - r''^2.\sin 2\psi'' = 0, \end{cases}$

desquelles on tire:

(31) $\quad \tan 2\psi' = \dfrac{r^2.\sin 2\psi}{r^2.\cos 2\psi - 1};\ \tan 2\psi'' = \dfrac{k^2r^2.\sin 2\psi}{k^2r^2.\cos 2\psi - 1};$

(32) $\quad r'^4 = 1 - 2r^2.\cos 2\psi + r^4;\ r''^4 = 1 - 2k^2r^2.\cos 2\psi + k^4r^4.$

Les formules précédentes ont lieu pour des valeurs quelconques du

module k. Si le module est une quantité réelle et plus petite que l'unité, k' sera une quantité réelle, et puisque les arguments u et v sont des quantités réelles, les fonctions elliptiques:

$$\xi = \sin am\,(u,k),\ \eta = \cos am\,(u,k),\ \zeta = \Delta am\,(u,k),$$
$$\xi' = \sin am(v,k'),\ \eta' = \cos am(v,k'),\ \zeta' = \Delta am\,(v,k'),$$

seront des quantités réelles. Du reste cela suit des formules (24) — (29), dont les numérateurs et dénominateurs seront tous des quantités positives. En effet des formules (32) et des suivantes, qu'on tire de même des formules (30):

$$r^4 = 1 - 2r'^2 \cdot \cos 2\psi' + r'^4;\quad r''^4 = k'^4 + 2k'^2k^2r'^2 \cdot \cos 2\psi' + k^4r'^4;$$
$$k^4r^4 = 1 - 2r''^2 \cdot \cos 2\psi'' + r''^4;\quad k^4r'^4 = k'^4 - 2k'^2r''^2 \cdot \cos 2\psi'' + r''^4$$

il suit que:

$$r'^4 = \text{ou} < (1 + r^2)^2,\ r''^4 = \text{ou} < (1 + k^2r^2)^2,\ r^4 = \text{ou} < (1 + r'^2)^2,$$
$$r''^4 = \text{ou} < (k'^2 + k^2r'^2)^2,\ k^4r^4 = \text{ou} < (1 + r''^2)^2,\ k^4r'^4 = \text{ou} < (k'^2 + r''^2)^2.$$

Donc: $r'^2 = \text{ou} < 1 + r^2$, $r''^2 = \text{ou} < 1 + k^2r^2$, $r^2 = \text{ou} < 1 + r'^2$,
$r''^2 = \text{ou} < k'^2 + k^2r'^2$; $k^2r^2 = \text{ou} < 1 + r''^2$, $k^2r''^2 = \text{ou} < k'^2 + r''^2$.

Pour déterminer les signes des quantités $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$, dont les formules (24) — (29) donnent les carrés, on remarque qu'en vertu des formules (1) du **105**, et puisque le dénominateur commun: $1 - \zeta^2\xi'^2 = \eta'^2 + k^2\xi^2\xi'^2$ est une quantité positive:

$\xi\zeta'$ doit avoir le même signe que $\cos\psi$,
$\eta\eta'$ doit avoir le même signe que $\cos\psi'$,
$\eta'\zeta\zeta'$ doit avoir le même signe que $\cos\psi''$,
$\eta\zeta\xi'\eta'$ doit avoir le même signe que $\sin\psi$,
$\xi\zeta\xi'\zeta'$ doit avoir le signe contraire de $\sin\psi'$,
$\xi\eta\xi'$ doit avoir le signe contraire de $\sin\psi''$.

De là on trouve que, tandis qu'on peut choisir arbitrairement les signes de η et de ζ, on doit toujours donner:

à ξ le même signe que $\eta\zeta \cdot \cos\psi \cdot \cos\psi' \cdot \cos\psi''$.
à ξ' le même signe que $\zeta \cdot \sin\psi \cdot \cos\psi'$,
à η' le même signe que $\eta \cdot \cos\psi'$,
à ζ' le même signe que $\eta\zeta \cdot \cos\psi' \cdot \cos\psi''$.

Si l'on choisit les signes de η, ζ, $\cos\psi'$ et $\cos\psi''$ positifs, on doit donner à ξ le même signe que celui de la partie réelle de ξ, à ξ' le même signe que celui de la partie imaginaire de ξ, tandisque η' et ζ' resteront des quantités positives.

Puisque on a: $u + iv = \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}}$, où

$$u = \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k^2x^2}},\quad v = \int_0^{\xi'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-k'^2x^2}},$$

on a pour une valeur quelconque réelle ou imaginaire de ξ:

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} + i \cdot \int_0^{\xi'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k'^2x^2}}$$

où ξ et ξ' sont des quantités réelles, dont les carrés sont déterminés par les formules précédentes (24) et (27). Le signe de ξ est le même que celui de la partie réelle de ξ, le signe de ξ' est celui de la partie imaginaire de ξ.

Exemple. Soit $k = \frac{1}{2}$, $\xi = 1 + \sqrt{-1}$. On a alors: $k'^2 = \frac{3}{4}$,

$$\xi = 1 + i = r(\cos\psi + i.\sin\psi), \text{ donc: } r = \sqrt{2},\ \psi = 45^0;$$

$$r'^4 = 1 - 2r^2.\cos 2\psi + r^4 = 1 + 4,\ r' = \sqrt{5},$$

$$r''^4 = 1 - 2k^2r^2.\cos 2\psi + k^4r^4 = 1 + \tfrac{1}{16}.4,\ r'' = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}},$$

$$\xi^2 = \frac{1 + r^2 - r'^2}{1 + k^2r^2 + r''^2} = \frac{1 + 2 - \sqrt{5}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = 7 - 3\sqrt{5},$$

$$\eta^2 = \frac{-k'^2r^2 + r'^2 + r''^2}{1 + k^2r^2 + r''^2} = \frac{-\frac{3}{2} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = -6 + 3\sqrt{5},$$

$$\zeta^2 = \frac{k'^2 + k^2r'^2 + r''^2}{1 + k^2r^2 + r''^2} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{-3 + 3\sqrt{5}}{4},$$

$$\xi'^2 = \frac{-1 + r^2 + r'^2}{k'^2r^2 + r'^2 + r''^2} = \frac{-1 + 2 + \sqrt{5}}{\frac{3}{2} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{3 + 3\sqrt{5}} = \frac{2}{3},$$

$$\eta'^2 = \frac{1 - k^2r^2 + r''^2}{k'^2r^2 + r'^2 + r''^2} = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + 3\sqrt{5}} = \frac{1}{3},$$

$$\zeta'^2 = \frac{k'^2 + k^2r'^2 + r''^2}{k'^2r^2 + r'^2 + r''^2} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2} + \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{6 + 6\sqrt{5}} = \frac{1}{2}.$$

Donc on aura:

$$\xi = \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\sqrt{2},\ \eta = \sqrt{3\sqrt{5} - 6},\ \zeta = \tfrac{1}{2}\sqrt{3\sqrt{5} - 3}$$

$$\xi' = \tfrac{1}{3}\sqrt{6},\ \eta' = \tfrac{1}{3}\sqrt{3},\ \zeta' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\int_0^{1+\sqrt{-1}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} + \sqrt{-1}.\int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{6}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}}.$$

$\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) = \frac{1}{2q}.\frac{\zeta - \sqrt{k'}}{\zeta + \sqrt{k'}}$, $k'^2 = \frac{3}{4}$, et en vertu de l'exemple 9 du **96**:

$\text{Log}\left(\frac{1}{q}\right) = 1{,}745\,3941$, $\text{Log } K = 0{,}226\,7933$.

$\sqrt{5} = 2{,}236\,0680$, $\text{Log } k'^2 = 0{,}875\,0613 - 1$

$3\sqrt{5} - 3 = 3{,}708\,2040$ $\text{Log } \sqrt{k'} = 0.968\,7653 - 1$

$\text{Log}(4\vartheta^2) = 0{,}569\,1636$ $\sqrt{k'} = 0{,}930\,6049$

$\text{Log}(2\vartheta) = 0{,}284\,5818$

$\text{Log}\,\vartheta = 0.983\,5518 - 1$

$\vartheta = 0.962\,8349$

$\sqrt{k'} = 0{,}930\,6049$

$\vartheta - \sqrt{k'} = 0.032\,2300$, $\text{Log}(\vartheta - \sqrt{k'}) = 0{,}508\,2603 - 2$

$\vartheta + \sqrt{k'} = 1.893\,4398$, $\text{Log}(\vartheta + \sqrt{k'}) = 0{,}277\,2515$

$0{,}231\,0088 - 2$

$\text{Log}\,\frac{1}{2q} = 1{,}444\,3641$

$\text{Log}\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right) = 0{,}675\,3729 - 1$

$\frac{\pi u}{K} = 61^0 44' 4'',26 = 1.077\,4706$

$\text{Log}\left(\frac{\pi u}{K}\right) = 0{,}032\,4055$

$\text{Log } K = 0\ 226\,7933$

$\text{Log}(\pi u) = 0{,}259\,1988$

$\text{Log}\,\pi = 0{,}497\,1499$

$\text{Log } u = 0{,}762\,0489 - 1$

$u = 0{,}578\,1611$

$\cos\left(\frac{\pi v}{K'}\right) = \frac{1}{2p} \cdot \frac{\vartheta' - \sqrt{k}}{\vartheta' + \sqrt{k}}$; $k = \frac{1}{2}$, $\vartheta' = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{k}$, donc: $\cos\left(\frac{\pi v}{K'}\right) = 0$,

$\frac{\pi v}{K'} = \frac{\pi}{2}$, $v = \frac{K'}{2}$. Or en vertu de l'exemple 9 du **96**

on a: $K' = 2{,}156\,515$; donc: $v = 1{,}078\,2575$.

$$u = \int_0^{1+\sqrt{-1}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}} = 0{,}578\,1611 + i\,.\,1{,}078\,2575$$

112. Si $u = o$, donc $\psi = 90^0$, on a $\xi = \sin am\,(iv,k) = ir$, $\xi^2 = -r^2$, $\psi' = o$, $\psi'' = o$, $r' = \sqrt{1+r^2}$, $r'' = \sqrt{1+k^2r^2}$. Les formules (24) et (26) du paragraphe précédent donneront alors:

$$\chi = o,\ \chi' = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}},$$

et on aura:

$$\int_0^{ir} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = i\,.\int_0^{\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k'^2x^2}}.$$

On peut du reste tirer cette formule directement des formules du paragraphe **19**. Si l'on y change k en k', x en χ' et pose $\xi = ir$, on en tire:

$$\int_0^{ir} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = i\int_0^{\xi'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k'^2x^2}},$$

où: $\xi = ir = \frac{i\xi'}{\sqrt{1-\xi'^2}}$, donc: $r = \frac{\xi'}{\sqrt{1-\xi'^2}}$, $\xi' = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$.

Exemple. Soit $k^2 = \frac{1}{2}$, $\xi^2 = -3$, $\xi = i\sqrt{3}$. On a alors:

$$k'^2 = \tfrac{1}{2},\ r = \sqrt{3},\ \xi' = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$u = \int_0^{i\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}} = i\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}} = iv.$$

Or en vertu de l'exemple 2 du **106** on a: $v = 1{,}142\,429$.

Donc on aura: $u = i\,.\,1{,}142\,429$.

113. Nous avons dans les paragraphes précédents seulement trouvé une des valeurs de l'intégrale elliptique u. Or on trouve toutes les autres valeurs de celle-la à l'aide des formules (3) du **24**. Si le sinus de l'amplitude, x, est donné, et que u soit la valeur de l'intégrale elliptique, ou de l'argument, trouvée par les formules des paragraphes précédents, toutes les autres valeurs de cette intégrale seront données par la formule:

$$2nK + 2miK' + (-1)^n.u$$

où n et m sont des nombres entiers quelconques.

Si au lieu du sinus de l'amplitude, x, l'amplitude elle même, φ, est donnée, toutes les autres valeurs de l'argument seront données par la formule:

$$2miK' + u,$$

où m est un nombre entier quelconque.

On voit facilement la coincidence de ces deux formules. En effet si l'on désigne par φ une quelconque des arcs, dont le sinus est x, toutes les autres valeurs de ces arcs seront données par la formule: $n\pi + (-1)^n \varphi$.

Or on a: $\int_0^{n\pi+(-1)^n\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{n\pi}^{n\pi+(-1)^n\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$.

Mais: $\int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \ldots + \int_{(2n-1)\frac{\pi}{2}}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$

et, si l'on pose $\varphi' = n\pi - \varphi$, on trouve:

$$\int_{(2n-1)\frac{\pi}{2}}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = K;$$

si l'on pose $\varphi' = \varphi - n\pi$, on trouve:

$$\int_{n\pi}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = K,$$

Donc on a:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \ldots = K, \quad \int_{0}^{n\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK.$$

De plus si l'on pose: $\varphi = n\pi + (-1)^n\varphi'$, on trouve:

$$\int_{n\pi}^{n\pi+(-1)^n\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = (-1)^n \int_{0}^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\Delta\varphi'} = (-1)^n . u.$$

Donc on a:

$$\int_{0}^{n\pi+(-1)^n.\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK + (-1)^n u = 2nK + (-1)^n (2miK' + u),$$

ou puisque, quand m est un nombre entier quelconque, $(-1)^n m$ sera de même une nombre entier quelconque:

$$\int_{0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-k^2x^2}} = 2nK + 2miK' + (-1)^n . u.$$

Addition au Chapitre dixième.

Formules des racines bicarrées des modules.

Des formules du 88 on peut à l'aide de la transformation de Landen déduire des formules nouvelles des racines bicarrées des modules k et k'. Si l'on change q en q^2, on changera en vertu du 78 en même temps: k en $k_2 = \frac{1-k'}{1+k'}$, en k' et $k'_2 = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$, K en $K_2 = K.\frac{1+k'}{2}$. De la formule (1) du 88 on trouve par cette substitution:

$$\sqrt{\frac{2k'.K_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}.\sqrt[4]{k'} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n . q^{2n^2},$$

et de là, en divisant par l'équation (3) du 88, on trouvera:

$$(1) \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n q^{2n^2}}{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n q^{n^2}} = \frac{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\ldots.}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots.}.$$

En divisant dans l'équation (1) du 88, on trouvera:

$$(2) \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n q^{n^2}}{1+2\sum_{1}^{\infty}{}_n(-1)^n q^{2n^2}} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots.}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\ldots.}$$

De même si l'on change q en $\sqrt{q}$, on changera en vertu du 78 au même temps: k en $k_{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, k' en $k'_{\frac{1}{2}} = \frac{1-k}{1+k}$, K en $K_{\frac{1}{2}} = K(1+k)$. De la formule (2) du 88 on trouve par cette substitution:

$$\sqrt{\frac{k_{\frac{1}{2}} \cdot K_{\frac{1}{2}}}{2\pi}} = \sqrt{\frac{K}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{k} = \sqrt[8]{q} \cdot \sum_1^\infty{}_n \, q^{\frac{n^2-n}{2}},$$

et de là en divisant par l'équation (3) du 88, on trouvera:

$$(3) \quad \sqrt[4]{k} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{\sum_1^\infty{}_n \, q^{\frac{n^2-n}{2}}}{1 + 2\sum_1^\infty{}_n \, q^{n^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{1+q+q^3+q^6+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+\ldots}.$$

En divisant dans l'équation (2) du 88, on trouvera de même:

$$(4) \quad \sqrt[4]{k} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{\sum_1^\infty{}_n \, q^{n^2-n}}{\sum_1^\infty{}_n \, q^{\frac{n^2-n}{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots}{1+q+q^3+q^6+\ldots}.$$

De ces dernières formules on peut encore déduire deux formules nouvelles de $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$ à l'aide de la substitution du 83. Si l'on change q en $-q$, on doit en vertu de ce paragraphe changer: k en $\pm \frac{ik}{k'}$, K en $k'K$; donc, puisque: $\sqrt[8]{-q} = \sqrt[4]{\pm i} \cdot \sqrt[8]{q}$, $(-1)^{n^2-n} = +1$ et $(-1)^{n^2} = (-1)^n$, on trouvera:

$$\sqrt[4]{\frac{k}{k'}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{\sum_1^\infty{}_n (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot q^{\frac{n^2-n}{2}}}{1 + 2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n \cdot q^{n^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{1-q-q^3+q^6+\ldots}{1-2q+2q^4-2q^9+\ldots}$$

$$\sqrt[4]{\frac{k}{k'}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{\sum_1^\infty{}_n \, q^{n^2-n}}{\sum_1^\infty{}_n (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot q^{\frac{n^2-n}{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots}{1-q-q^3+q^6+\ldots},$$

et de là, en multipliant la première par la formule (2), et divisant la dernière dans la formule (4):

$$(5) \quad \sqrt[4]{k} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{\sum_1^\infty{}_n (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot q^{\frac{n^2-n}{2}}}{1 + 2\sum_1^\infty{}_n (-1)^n q^{2n^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{1-q-q^3+q^6+\ldots}{1-2q^2+2q^8-2q^{18}+\ldots},$$

$$(6) \quad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum_1^\infty{}_n (-1)^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot q^{\frac{n^2-n}{2}}}{\sum_1^\infty{}_n \, q^{\frac{n^2-n}{2}}} = \frac{1-q-q^3+q^6+\ldots}{1+q+q^3+q^6+\ldots}.$$

De la formule (1) du 93 jointe aux formules (1) et (2) du 89 on peut encore déduire des formules nouvelles de $\sqrt[4]{k}$ et $\sqrt[4]{k'}$. En effet on trouve de ces dernières formules:

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{\prod_1^\infty{}_n (1+q^{2n}) \cdot (1-q^{2n})}{\prod_1^\infty{}_n (1+q^{2n-1}) \cdot (1-q^{2n})} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{q} \cdot \frac{\prod_1^\infty{}_n (1-q^{4n})}{\prod_1^\infty{}_n (1-(-1)^n q^n)},$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{\prod_1^\infty (1-q^{2n-1}).(1-q^{2n})}{\prod_1^\infty (1+q^{2n-1}).(1-q^{2n})} = \frac{\prod_1^\infty (1-q^n)}{\prod_1^\infty (1-(-1)^n q^n)}.$$

Or de la formule (1) du **93** on trouve, si l'on substitue $\sqrt{q}$ au lieu de q:

$$(7) \qquad \prod_1^\infty (1-q^n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n . q^{\frac{3n^2+n}{2}};$$

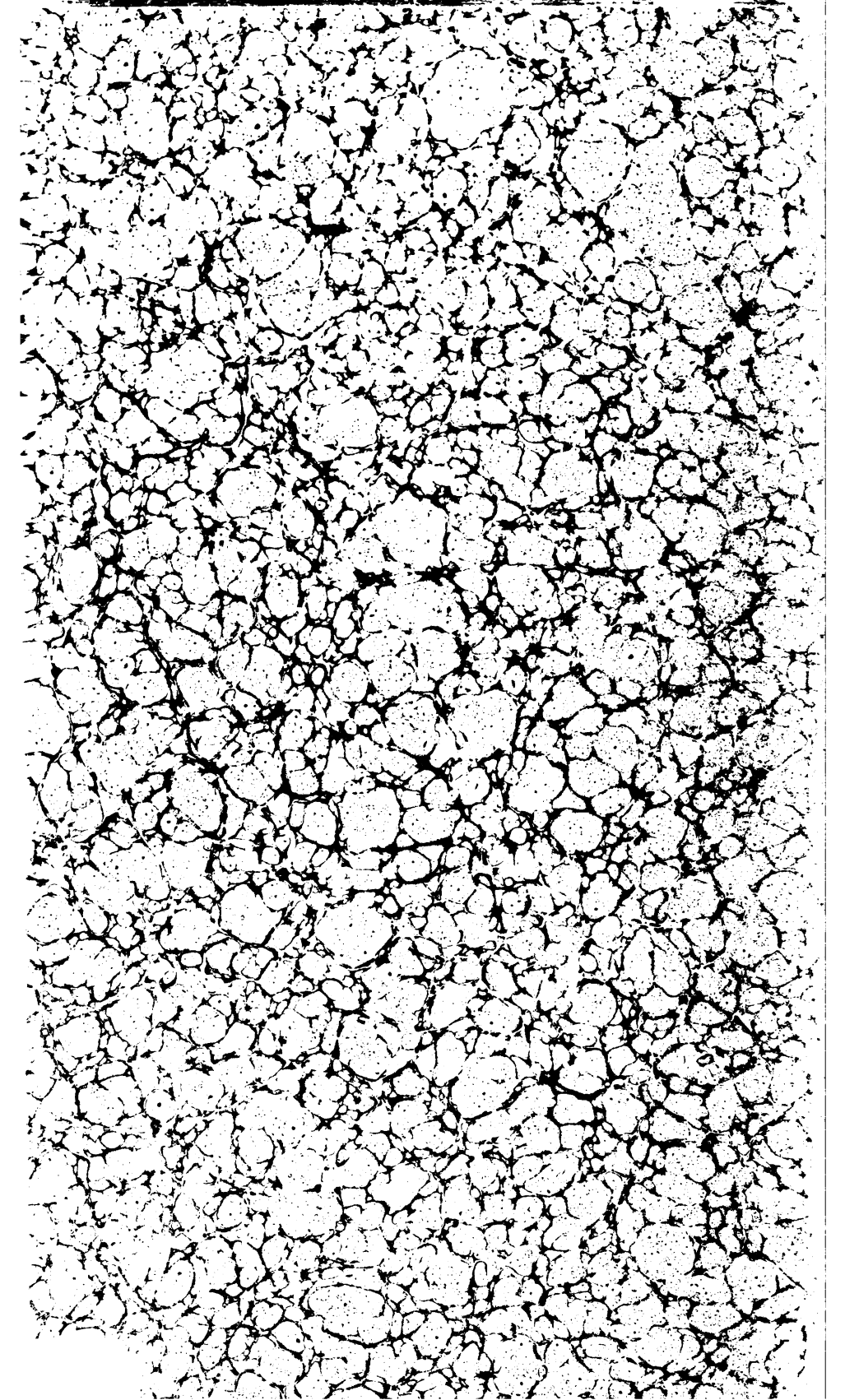
puis, en substituant ici $-q$ au lieu de q:

$$(8) \qquad \prod_1^\infty (1-(-1)^n q^n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} . q^{\frac{3n^2+n}{2}};$$

et enfin, si l'on substitue dans la formule (1) du 93 q^2 au lieu de q:

$$(9) \qquad \prod_1^\infty (1-q^{4n}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{6n^2+2n}.$$

Donc on aura:

$$(10) \qquad \sqrt[4]{k} = \sqrt{2} . \sqrt[8]{q} . \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{6n^2+2n}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} . q^{\frac{3n^2+n}{2}}} = \sqrt{2} . \sqrt[8]{q} . \frac{1-q^4-q^8+q^{20}+\ldots}{1+q-q^2-q^5-\ldots},$$

$$(11) \qquad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n . q^{\frac{3n^2+n}{2}}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} . q^{\frac{3n^2+n}{2}}} = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7-\ldots}{1+q-q^2-q^5-q^7-\ldots}.$$